Natura dei punti reali di una quadrica

Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica generale in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$. Come nel caso delle coniche è possibile associare a $\mathcal{Q}$ una matrice reale e simmetrica αA, definita a meno di un coeffeciente di proporzionalità $\alpha \neq 0$, tale che chiamato $b_{\alpha A}(X, Y) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare indotto su $\mathbb{R}^4$ dalla matrice A, i punti di $\mathcal{Q}$ sono esattamente i punti le cui coordinate omogenee sono classi proporzionalità di vettori isotropi per $b_{\alpha A}$, ovvero vettori X tali che $b_{\alpha A}(X, X) = 0$. Esattamente come nel caso delle coniche è immediato vedere che la relazione di ortogonalità indotta dalla forma bilineare

$$X \perp_{\mathcal{Q}} Y \Leftrightarrow b_{\alpha A}(X, Y) = 0$$

non dipende dallo scalare non nullo α ma dalla sola quadrica $\mathcal{Q}$ ed inoltre

$$X \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow X \in X^{\perp_{\mathcal{Q}}}.$$

Sempre in stretta analogia al caso delle coniche è possibile data $\mathcal{Q}$ associata ad una forma bilineare simmetrica $b_{\alpha A}(X, Y)$ trovare una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto cui la forma b abbia matrice diagonale D; per il teorema della base spettrale, considerato che αA è una matrice simmetrica, le entrate sulla diagonale di D sono gli autovalori di αA. Chiaramente il cambio di base considerato può mutare la $\mathcal{C}_\infty$ di $\mathcal{Q}$ ma non cambia le proprietà proiettive della quadrica stessa; in particolare se $\mathcal{Q}$ contiene rette o meno, ovvero se i punti di $\mathcal{Q}$ sono iperbolici o ellittici.

Chiamiamo *segnatura di* $\mathcal{Q}$ l'elenco dei segni degli autovalori di αA, con la convenzione che si sceglie α di modo tale che il numero di autovalori positivi sia non inferiore a quello di autovalori negativi (chiaramente, se la quadrica è generale non ci sono autovalori nulli).

Si verificano i seguenti casi:

- **Segnatura** $(+, +, +, +)$: in questo caso la forma $b_{\alpha A}(X, Y)$ è definita positiva; pertanto non vi sono vettori reali non nulli isotropi e la quadrica $\mathcal{Q}$ è priva di punti reali.

- **Segnatura** $(+, +, +, -)$: in questo caso la quadrica possiede punti reali. Siano $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$ i 3 autovalori positivi e $-\beta^2$ l'autovalore negativo. Allora il punto reale $[(\beta, 0, 0, \alpha_1)]$ appartiene alla quadrica ed il piano tangente in esso ha equazione

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & & & \\ & \alpha_2^2 & & \\ & & \alpha_3^2 & \\ & & & -\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0,$$

  cioè, normalizzando $\alpha_1 x_1 - \beta x_4 = 0$. Intersecando con $\mathcal{Q}$ si vede che la conica tangente ha equazioni

$$\begin{cases} \alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_2^2 x_2^2 + \alpha_3^2 x_3^2 - \beta x_4^2 = 0 \\ \alpha_1 x_1 = \beta x_4 \end{cases}$$

  da cui, sostituendo

$$\begin{cases} \alpha_2^2 x_2^2 + \alpha_3^2 x_3^2 = 0 \\ \alpha_1 x_1 = \beta x_4 \end{cases}$$

  che si spezza in due rette immaginarie coniugate. In particolare i punti sono tutti ellittici.

- **Segnatura** $(+, +, -, -)$ Ragionando come nel caso precedente, si vede che chiamati gli autovalori $\alpha_1^2, \alpha_2^2, -\beta_1^2, -\beta_2^2$ i punti $R = [(\beta_1, 0, \alpha_1, 0)]$ e $S = [(0, \beta_2, 0, \alpha_2)]$ entrambi appartengono a $\mathcal{Q}$. Inoltre

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & & & \\ & \alpha_2^2 & & \\ & & -\beta_1^2 & \\ & & & -\beta_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 \\ 0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0,$$

cioè $R \in S^{\perp_{\mathcal{Q}}}$, ovvero R appartiene al piano tangente a $\mathcal{Q}$ in S. Ne segue che il piano tangente a $\mathcal{Q}$ in S non può contenere solamente S e dunque contiene rette reali. Poiché S non può essere un punto parabolico (visto che $\mathcal{Q}$ è generale), ne segue che S è iperbolico e dunque tutti i punti di $\mathcal{Q}$ sono iperbolici.

Osservazione: poiché il determinante di una matrice A reale e simmetrica è dato dal prodotto dei suoi autovalori, è immediato vedere che se $\det(A) < 0$, allora la segnatura della forma associata deve essere del tipo $(+,+,+,-)$ e dunque i punti reali della quadrica sono tutti ellittici. Se $\det(A) > 0$, allora ci sono due possibilità:

a) la segnatura è $(+,+,+,+)$ e la quadrica è priva di punti reali (si tratta dunque di un ellissoide);

b) la segnatura è $(+,+,-,-)$ e la quadrica è a punti iperbolici.

Pertanto una quadrica che ha almeno un punto reale e matrice associata con $\det(A) < 0$ è a punti iperbolici.