Nullità più rango

Sia $\mathbb{K}$ un campo ed $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Al solito consideriamo gli elementi di $\mathbb{K}^n$ come vettori colonna di lunghezza n. Sia f_A l'applicazione lineare data da

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ X \to AX. \end{cases}$$

Poniamo

$$\ker(A) := \ker(f_A) = \{X \in \mathbb{K}^n \colon AX = \mathbf{0}\},$$
$$\mathrm{null}(A) := \dim(\ker(A)).$$

Lemma 1. *Lo spazio vettoriale* $\mathrm{Im}(f_A)$ *è generato dalle colonne di* A*. In particolare,*

$$\mathrm{rk}(A) = \dim(\mathrm{Im}(f_A)).$$

Dimostrazione. Siano $C_1, \ldots, C_n$ le colonne di A. Denotiamo con $\mathcal{E} := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Lo spazio $\mathrm{Im}(f_A)$ è generato da $f_A(\mathcal{E}) := (f_A(\mathbf{e}_1), \ldots, f_A(\mathbf{e}_n))$. D'altro canto $f_A(\mathbf{e}_i) = C_i$ per $i = 1, \ldots, n$; questo implica la tesi. □

Lemma 2. $\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$ *se e solamente se le colonne di* A *sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Sia $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ Osserviamo che $f_A(X) = x_1C_1 + \cdots + x_nC_n$. In particolare $f_A(X) = \mathbf{0}$ implica che i valori di X determinano una combinazione lineare delle colonne di A che dà il vettor nullo. Pertanto, se le colonne sono linearmente indipendenti

$$f(X) = \mathbf{0} \Rightarrow X = (0, \ldots, 0),$$

da cui $\ker(f_A) = \{\mathbf{0}\}$. Viceversa $\ker(f_A) = \{\mathbf{0}\}$ implica che l'unica combinazione lineare delle colonne di A che dà $\mathbf{0}$ è quella con coefficienti tutti nulli e dunque esse sono linearmente indipendenti. □

Teorema 1 (Nullità più rango)**.**

$$\mathrm{null}(A) + \mathrm{rk}(A) = n$$

Dimostrazione. Poniamo $t = \mathrm{null}(A)$ e sia $\mathcal{B}_0 := (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_t)$ una base di $\ker(A)$. Completiamo $\mathcal{B}_0$ a base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^n$ aggiungendo $n - t$ vettori $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-t})$ con il teorema di completamento della base. Per le proprietà delle applicazioni lineari $f_A(\mathcal{B}) = (f_A(\mathbf{u}_1), \ldots, f_A(\mathbf{u}_t), f_A(\mathbf{e}_1), \ldots, f_A(\mathbf{e}_{n-t}))$ è un sistema di generatori per $\mathrm{Im}(f_A)$. Inoltre, poiché $f_A(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$ per $i = 1, \ldots, t$ è immediato osservare che i soli vettori di $\mathcal{S} := (f_A(\mathbf{e}_1), \ldots, f_A(\mathbf{e}_{n-t}))$ sono un sistema di generatori per $\mathrm{Im}(f_A)$. Asseriamo ora che $\mathcal{S}$ è una sequenza libera, da cui segue $\mathrm{rk}(A) = \dim(\mathrm{Im}(f_A)) = n - t$ e dunque l'asserto del teorema. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{S}$ sia legata; allora esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-t}$ non tutti nulli tali che $\alpha_1 f(\mathbf{e}_1) + \cdots + \alpha_{n-t} f(\mathbf{e}_{n-t}) = \mathbf{0}$. Da questo, per le proprietà delle applicazioni lineari, segue $f(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_{n-t}\mathbf{e}_{n-t}) = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{v} := \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_{n-t}\mathbf{e}_{n-t} \in \ker(A)$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Poiché $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_t)$ è una base di $\ker(A)$, ne segue che esistono $\beta_1, \ldots, \beta_t$ tali che

$$v = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_{n-t}\mathbf{e}_{n-t} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_t\mathbf{u}_t,$$

assurdo in quanto il vettore $\mathbf{v}$ si scriverebbe in due modi distinti come combinazione lineare di vettori della base $\mathcal{B}$. □

Corollario 1. *Sia* $AX = B$ *un sistema lineare compatibile con* $A \in \mathbb{K}^{m,n}$*. Allora* $AX = B$ *ammette esattamente* ∞^{n-k} *soluzioni, ove* $k = \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|B)$*.*

Dimostrazione. Ogni soluzione del sistema $AX = B$ è del tipo $X_0 + Z$ con $Z \in \ker(A)$ ed X_0 soluzione particolare fissata. Per il teorema precedente $\dim(\ker(A)) = \mathrm{null}(A) = n - \mathrm{rk}(A)$. □