Sia $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots C_n \end{pmatrix}$ la generica matrice di $M_n(\mathbb{K})$. Sia inoltre $J_{i_1,\dots,i_n}$ la matrice che ha come k-esima colonna la i_k-esima colonna della matrice identica.

Teorema 1. *Esiste un'unica funzione* $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *tale che*

1. $\det(I_n) = 1$ *(unitarietà)*

2. $$\det \begin{pmatrix} C_1 & \dots & \alpha C_i + \beta C_i' & \dots & C_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_i & \dots C_n \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_i' & \dots C_n \end{pmatrix}$$

   (multilinearità)

3. $\det \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_i & \dots & C_j & \dots & C_n \end{pmatrix} = 0$ *se* $C_i = C_j$ *(alternanza).*

Tale funzione è detta determinante.

Premettiamo due lemmi.

Lemma 1. *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_i & \dots C_j & \dots C_n \end{pmatrix}$$

ed

$$A' = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_j & \dots C_i & \dots C_n \end{pmatrix}$$

due matrici ottenute l'una dall'altra scambiando fra loro due colonne. Allora $\det(A) = -\det(A')$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$\det(A) = \det(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_i & \dots C_j & \dots C_n \end{pmatrix} = \det(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_i + C_j & \dots C_j & \dots C_n \end{pmatrix}$$

e

$$\det(A') = \det(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_i & \dots C_j & \dots C_n \end{pmatrix} = \det(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_j + C_i & \dots C_i & \dots C_n \end{pmatrix}.$$

Allora,

$$0 = \det(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_i + C_j & \dots C_j & \dots C_n \end{pmatrix} + \\ + \det(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_j + C_i & \dots C_i & \dots C_n \end{pmatrix} = \det(A) + \det(A').$$

□

Definizione 1. *Una* permutazione *di* $(1, 2, \dots, n)$ *è una funzione biiettiva* $\{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$. *Una permutazione è detta* pari *se si può ottenere come composizione di un numero pari di scambi (anche* 0*); dispari in caso contrario.*

Lemma 2. *Si ha*

$$\det(J_{i_1,\dots,i_n}) = \begin{cases} 0 & \textit{se ci sono indici ripetuti} \\ +1 & \textit{se } (i_1,\dots,i_n) \textit{ è una permutazione pari di } (1,\dots,n) \\ -1 & \textit{se } (i_1,\dots,i_n) \textit{ è una permutazione dispari di } (1,\dots,n) \end{cases}$$

Dimostrazione. Se ci sono indici ripetuti, allora la matrice $J_{i_1,\dots,i_n}$ contiene colonne ripetute e dunque ha determinante 0. Altrimenti basta considerare quanti scambi di colonne servono per ottenere la matrice $J_{i_1,\dots,i_n}$ a partire da I_n ed applicare il lemma precedente. □

Dimostrazione del Teorema 1. Supponiamo che si scriva $C_i := \sum_j a_{ji}E_j$ ove E_j è l'i-esima colonna della matrice identica (ovvero l'i-esimo vettore colonna della base canonica di $\mathbb{K}^n$. Allora

$$\det(A) = \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \det(\begin{pmatrix} E_{j_1} & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}) =$$
$$\sum_{i_1,i_2=1}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2} \det(\begin{pmatrix} E_{j_1} & E_{j_2} & \dots & C_n \end{pmatrix}) =$$
$$\dots = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=1}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots a_{i_n n} \det(J_{i_1,i_2,\dots,i_n}).$$

In particolare il determinante è univocamente determinato dal valore di $\det(J_{i_1,\dots,i_n})$ che è ottenuto nel lemma precendente. L'ultima quantità, escludendo i casi in cui è nulla, si puo' scrivere anche come

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\operatorname{sgn}(\sigma),$$

la formula nella Definizione 3.1.4 di pag. 58 del libro. □

Corollario 1. $\det(A) = \det({}^tA)$.

Dimostrazione. Basta prendere la formula finale nella riga precedente e sommare su σ^{-1}. □

Alla luce del precedente corollario, ogni asserzione sulle *colonne* di A si applica anche alle *righe* della stessa.

Corollario 2. *Se la matrice A contiene una colonna C_i nulla, allora* $\det(A) = 0$.

Dimostrazione. Segue direttamente dalla multilinearità, con $\alpha_i = 0$. In dettaglio, la matrice con la colonna $C_i = \mathbf{0}$ nulla ha il medesimo determinante della matrice con la stessa colonna C_i moltiplicata per 0 e tale determinante è $0 \cdot \det(A)$. □

Corollario 3. *Se ad una colonna di A si somma una combinazione lineare delle rimanenti, allora il determinante non cambia.*

Dimostrazione. Sia $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_i & \dots & C_n \end{pmatrix}$. Per il Corollario 2,

$$\det(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_i + \sum_{j\neq i}\alpha_j C_j & \dots & C_n \end{pmatrix}) =$$
$$\det(A) + \sum_{j\neq i}\alpha_j \det(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_j & \dots & C_n \end{pmatrix}) = \det(A) + \sum_{j\neq i}\alpha_j \cdot 0 = \det(A).$$

□

Definizione 2. *Sia $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}$. Una* trasformazione elementare *delle colonne di A è una delle seguenti operazioni su di esse:*

1. *Scambiare una colonna C_i (riga) con l'opposta $-C_j$ di un'altra per $i \neq j$ (in simboli $C_i \leftrightarrow -C_j$).*
2. *Sommare ad una colonna (riga) C_i una combinazione lineare $\sum_{j\neq i}\alpha_j C_j$ delle altre (in simboli $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j\neq i}\alpha_j C_j$)*

Lemma 3. *Le trasformazioni elementari fra colonne (righe) non cambiano il determinante di A.*

Dimostrazione. È conseguenza della definizione di determinante, del Lemma 1 e del Corollario 3. □

Lemma 4. *Supponiamo che le colonne di $A = \begin{pmatrix} C_1 & \dots C_n \end{pmatrix}$ siano un sistema libero. Allora le colonne di ogni matrice ottenuta da A mediante trasformazioni elementari sono ancora un sistema libero.*

Dimostrazione. Chiaramente, se il sistema delle colonne di A è libero, moltiplicare una di esse per uno scalare non nullo o scambiare due di esse fra loro fornisce ancora un sistema libero. Supponiamo ora che la colonna i-esima sia sostituita da $C_i' \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j C_j$ e che la nuova sequenza sia legata. Allora esistono $\beta_1, \dots, \beta_n$ non tutti nulli tali che

$$\beta_1 C_1 + \cdots + \beta_i C_i' + \cdots + \beta_n C_n = \mathbf{0}.$$

Se fosse $\beta_i = 0$, avremmo che le colonne $C_1, \dots, C_{i-1}, C_{i+1}, \dots, C_n$ sarebbero un sistema legato, contro l'ipotesi. Dunque $\beta_i \neq 0$ e

$$C_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j C_j = C_i' = -\beta_i^{-1} (\sum_{j \neq i} \beta_j C_j),$$

da cui

$$C_i = -\sum_{j \neq i} (\beta_i^{-1} \beta_j + \alpha_j) C_j$$

e il sistema delle colonne di A sarebbe legato, contro l'ipotesi. Ne segue che il sistema ottenuto mediante trasformazioni elementari è libero. □

Teorema 2 (Eliminazione gaussiana)**.** *Sia $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}$ una matrice quadrata. Allora esiste una matrice*

$$A' = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$$

con $\det(A) = \det(A') = \beta_1 \cdot \dots \cdot \beta_n$ *ottenuta mediante operazioni elementari sulle colonne (scambi e combinazioni lineari di una colonna con le rimanenti).*

Dimostrazione. Per induzione su n, ordine della matrice A. Se $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo che l'asserto valga per matrici di ordine $n-1$ e sia A di ordine n. Se $A = \underline{\mathbf{0}}$ è la matrice nulla, non vi è niente da dimostrare e $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$. Se la prima riga R_1 di A è nulla, allora la matrice è della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a''_{22} & \dots & a''_{2n} \\ a_{31} & a''_{32} & \dots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a''_{n2} & \dots & a''_{nn} \end{pmatrix}.$$

Se $a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1}$, allora

$$A''' := A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a''_{22} & \dots & a''_{2n} \\ 0 & a''_{32} & \dots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a''_{n2} & \dots & a''_{nn} \end{pmatrix}.$$

Altrimenti scambiamo la prima riga di A con una riga $-R_j$ con $R_j \neq \mathbf{0}$, ottenendo una matrice A'. Scambiamo adesso la prima colonna C_1' di A' con $-C_j'$ ove $-C_j'$ ha entrata $a_{1j}' \neq 0$. Chiamata A'' tale matrice $\det(A'') = \det(A)$. Adesso modifichiamo ogni colonna C_i'' di A'' con $i > 1$ nel seguente modo $C_i'' \leftarrow C_i'' - a_{1i}'' {a_{11}''}^{-1} C_1''$. Lo stesso ragionamento può essere fatto anche sulle righe di A (visto che $A'' = {}^tA''$ e si può sostituire ogni riga R_i'' con $i > 1$ con $R_i'' \leftarrow R_i'' - a_{i1}'' {a_{11}''}^{-1} R_i''$. Queste due operazioni non cambiano il determinante per il Lemma 3 e conducono ad una matrice A''' della forma

$$A''' = \begin{pmatrix} a_{11}'' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}''' & \dots & a_{2n}''' \\ 0 & a_{32}''' & \dots & a_{3n}''' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}''' & \dots & a_{nn}''' \end{pmatrix}.$$

Qualunque sia il valore di a_{11}''. Per ipotesi induttiva ora è possibile ridurre nella forma indicata il minore

$$A_{11}''' = \begin{pmatrix} a_{22}''' & \dots & a_{2n}''' \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2}''' & \dots & a_{nn}''' \end{pmatrix}$$

e le operazioni sulle colonne di tale minore ovviamente possono estendersi ad operazioni fra le colonne $C_2''', \dots, C_n'''$ di A''' che non modificano la prima riga di A''' (visto che in corrispondenza di esse vi sono tutti 0). Ne segue che dopo al più n passi si costruisce una matrice della forma diagonale richiesta. □

Teorema 3. *Sia* $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}$ *una matrice* $n \times n$. *Allora* $\det(A) = 0$ *se e solamente se le colonne (righe) di* A *sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. Se le colonne di A sono linearmente dipendenti, allora una di esse, diciamo C_i, è combinazione lineare delle rimanenti, cioè $C_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j C_j$. Per il Corollario 3, la matrice A' ottenuta da A sostituendo la sua i-esima colonna con $C_i - \sum_{j \neq i} \alpha_j C_j$ ha il medesimo determinante di A e contiene una colonna nulla. Ne segue per il Corollario 2, $\det(A) = \det(A') = 0$.

Viceversa, supponiamo $\det(A) = 0$. Se per assurdo le colonne di A fossero linearmente indipendenti, a meno di trasformazioni elementari, usando il Teorema 2, sarebbe possibile scrivere una matrice

$$A' = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$$

con $\det(A') = \det(A)$. Per il Lemma 4, le colonne di A' sono un sistema libero e dunque $\beta_1, \dots, \beta_n \neq 0$. Seguirebbe $\det(A) = \beta_1 \cdot \dots \cdot \beta_n \neq 0$, assurdo. □

Corollario 4. $\det(A) \neq 0$ *se e solamente se le colonne (righe) di* A *sono linearmente indipendenti. In particolare, in tal caso anche le righe sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Segue dal Teorema 3 e dal Corollario 1. □