Equivalenza Proiettiva

Sia $\mathcal{C}$ una conica, A la matrice quadrata e simmetrica ad essa associata, $b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la forma bilineare simmetrica indotta da A e $q(x) := b(x, x)$ la forma quadratica associata. In particolare i punti di $\mathcal{C}$ sono rappresentati da classi $[x]$ di vettori non nulli di $\mathbb{R}^3$ tali che $q(x) = 0$. Si dice che tali punti sono *isotropi*.

La forma bilineare $b(x, y)$ in generale non è definita positiva; in ogni caso, applicando la procedura di Gram-Schnidt è possibile ottenere una nuova base $\mathfrak{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $b(e_i, e_j) = 0$ se $i \neq j$, $b(e_i, e_i) \in \{-1, 0, +1\}$.

la forma quadratica rispetto la nuova base ha equazione

$$q'(x) = \alpha {x_1}^2 + \beta {x_2}^2 + \gamma {x_3}^2,$$

con $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{-1, 0, 1\}$; in altre parole c'è una matrice diagonale D con entrate in $-1, 0, +1$ che rappresenta la forma stessa. L'elenco delle entrate in D è detto *segnatura* di q (o, equivalentemente, di b).

A meno di permutare i vettori della base possiamo anche supporre che sia $\alpha > 0$ e che $\beta = 0$ implichi $\gamma = 0$.

Ovviamente la nuova forma quadratica (che è differente da quella di partenza) ma il luogo delle classi di vettori che la annullano rappresentano il *medesimo ente geometrico*.

Si verificano i seguenti casi:

- Se $\text{rk}(D) = 1$, cioè $\beta = \gamma = 0$ ed $\alpha = 1$. allora la conica è doppiamente degenere e si spezza in una retta (reale) contata due volte.
- Se $\text{rk}(D) = 2$, cioè $\gamma = 0$ ma $\alpha, \beta \neq 0$; allora la conica è semplicemente degenere.
  - Se $\alpha\beta = 1$ allora la conica si spezza in due rette immaginarie coniugate;
  - Se $\alpha\beta = -1$ allora la conica si spezza in due rette reali e distinte.
- Se $\text{rk}(D) = 3$, allora possiamo supporre che almeno 2 termini nell'equazione della conica siano entrambi maggiori di 0 (altrimenti la moltiplichiamo per -1). A meno di permutare gli ultimi due vettori della base, pertanto, $\alpha = \beta = 1$. Ci sono due sottocasi:
  - Se $\gamma = 1$ allora la conica è priva di punti reali.
  - Se $\gamma = -1$ allora la conica ha punti reali.

Pertanto, a meno di cambiamenti di riferimento, le coniche proiettivamente possono essere:

1. Riducibili in una retta contata 2 volte;
2. Riducibili in 2 rette distinte r ed s con
   (a) $r = \overline{s}$ rette immaginarie coniugate;
   (b) r, s rette reali e distinte;
3. Irriducibili e
   (a) prive di punti reali;
   (b) dotate di punti reali.

La classificazione *affine* delle coniche generali studia la natura dei punti impropri delle stesse; si veda al proposito il testo (come pure per la riduzione di tali coniche a forma canonica).

Coniche come luoghi

Al fine di studiare le proprietà metriche di una conica il modo più diretto è quello di scegliere un riferimento euclideo tale che la conica stessa abbia equazione canonica e poi ragionare in coordinate a partire da detta equazione.

Più nello specifico:

- **Circonferenza**: la forma canonica della equazione della circonferenza è

$$x^2 + y^2 = r^2$$

con $O = (0,0)$ centro della stessa. Segue immediatamente che essa è il luogo dei punti a distanza r dal centro.

- **Ellisse**: più in generale la forma canonica dell'equazione di una ellisse $\mathcal{E}$ è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a \geq b$. Posto $c^2 = a^2 - b^2$, i fuochi reali hanno coordinate $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$. Verifichiamo che $\mathcal{E}$ è il luogo dei punti la cui somma delle distanze da F_1 ed F_2 è costante, infatti considerato che

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}, \qquad c^2 + y^2 + x^2 = \frac{c^2x^2 + a^4}{a^2},$$

$$\begin{aligned}(d(F_1, X) + d(F_2, X))^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \\ (x-c)^2 + (x+c)^2 + 2y^2 + 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \\ 2(x^2 + c^2 + y^2) + 2\sqrt{(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2} = \\ 2\frac{a^4 + c^2x^2}{a^2} + 2\frac{\sqrt{(a^4 - c^2x^2)^2}}{a^2}.\end{aligned}$$

Considerato che $a^4 > c^2x^2$ in quanto $c^2 \leq a^2$ ed $x^2 \leq a^2$ l'ultima espressione diviene

$$d(F_1, X) + d(F_2, X) = 2|a|.$$

- **Iperbole**: la forma canonica dell'equazione di una iperbole $\mathcal{H}$ è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a \geq b$. Posto $c^2 = a^2 + b^2$, i fuochi reali hanno coordinate $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$. Verifichiamo che $\mathcal{H}$ è il luogo dei punti la cui differenza delle distanze da F_1 ed F_2 è costante, infatti, considerato che

$$y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2, \qquad c^2 + y^2 + x^2 = \frac{c^2x^2 + a^4}{a^2},$$

si ha

$$\begin{aligned}(d(F_1, X) - d(F_2, X))^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \\ (x-c)^2 + (x+c)^2 + 2y^2 - 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c) + y^2} = \\ 2(x^2 + c^2 + y^2) - 2\sqrt{(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2} = \\ 2\frac{c^2x^2 + a^4}{a^2} - 2\frac{\sqrt{(a^4 - c^2x^2)^2}}{a^2}\end{aligned}$$

Considerato che in questo caso $x^2 > a^2$ e dunque $a^4 - c^2x^2 < 0$, questo diviene

$$(d(F_1, X) - d(F_2, X))^2 = 2\frac{c^2x^2 + a^4}{a^2} - 2\frac{c^2x^2 - a^4}{a^2} = 4a^2.$$

L'ultima espressione dunque implica

$$d(F_1, X) - d(F_2, X) = 2|a|.$$

- Parabola: la forma canonica dell'equazione di una parabola $\mathcal{P}$ è

$$y = ax^2$$

con fuoco $F = (0, \frac{1}{4a})$ e direttrice $r : y = -\frac{1}{4}a$. Sia $X = (x, x^2)$ un punto della stessa. Allora, la distanza al quadrato di P da F è

$$d(F, X)^2 = x^2 + (ax^2 - \frac{1}{4a})^2 = a^2x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2}$$

La distanza al quadrato di P dalla direttrice r è

$$d(P, r) = (ax^2 + \frac{1}{4a})^2 = a^2x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2}$$

e le due quantità sono ovviamente uguali.

Osservazione: in generale lo studio delle coniche in forma canonica consente anche di evidenziare le proprietà di simmetria di cui esse godono rispetto gli assi; in particolare se r è un asse di una conica, allora la funzione $\sigma_r : \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ che manda ogni punto P nel punto $P' = \sigma(P)$ tale che r sia l'asse di simmetria del segmento di estremi P e P' trasforma la conica in se stessa.