Cambiamenti di base

Sia $\mathbb{K}$ un campo, $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione n su di esso e $\mathcal{B} := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $\mathcal{B}' := (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ due sue basi. Poniamo

$$\mathbf{E} := \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E}' := \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_n \end{pmatrix}.$$

Siano ora

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 & = t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{12}\mathbf{e}_2 + \dots t_{1n}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_2 & = t_{21}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + \dots t_{2n}\mathbf{e}_n \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_1 & = t_{n1}\mathbf{e}_1 + t_{n2}\mathbf{e}_2 + \dots t_{nn}\mathbf{e}_n \end{cases}$$

e $T := (t_{ij})_{i,j=1}^n$ la matrice di cambiamento di base. Allora possiamo scrivere

$$\mathbf{E}' = T\mathbf{E}, \qquad \mathbf{E} = T^{-1}\mathbf{E}'.$$

Richiamiamo che la matrice T è la matrice invertibile $n \times n$ che contiene come *righe* le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto $\mathcal{B}$.

1 Componenti di vettori

Consideriamo ora un generico vettore $\mathbf{v} \in V_n(\mathbb{K})$. Possiamo sempre scrivere la condizione

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n = x'_1\mathbf{e}'_1 + \cdots + x'_n\mathbf{e}'_n$$

in forma matriciale come

$$\mathbf{v} = {}^t\mathbf{E}X = {}^t\mathbf{E}'X',$$

ove

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Da questo deduciamo

$${}^t\mathbf{E}X = {}^t\mathbf{E}'X' = {}^t(T\mathbf{E})X' = \mathbf{E}({}^tTX'),$$

che porta all'equazione di cambio di coordinate dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$ data da

$$X = {}^tTX', \qquad X' = {}^tT^{-1}X. \tag{1}$$

2 Applicazioni lineari

Sia ora $f : V_n(\mathbb{K}) \to V_n(\mathbb{K})$ una applicazione lineare e siano A ed A' le matrici che rappresentano f rispetto le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Allora

$$f(\mathbf{v}) = f({}^t\mathbf{E}X) = {}^t\mathbf{E}(AX),$$
$$f(\mathbf{v}) = f({}^t\mathbf{E}'X') = {}^t\mathbf{E}'(A'X'),$$

da cui

$${}^t\mathbf{E}'(A'X') = {}^t\mathbf{E}(AX) = {}^t\mathbf{E}(A\,{}^tTX') = {}^t(T^{-1}\mathbf{E}')(A\,{}^tTX') = {}^t\mathbf{E}'({}^tT^{-1}A\,{}^tT)X',$$

che implica

$$A' = {}^tT^{-1}A\,{}^tT. \tag{2}$$

In particolare, le matrici A ed A' sono simili.

3 Forme bilineari

Sia $\beta : V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ una forma bilineare e siano A ed A' le matrici che la rappresentano rispetto le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Allora, per $\mathbf{v} = {}^t\mathbf{E}X = {}^t\mathbf{E}'X'$ e $\mathbf{w} = {}^t\mathbf{E}Y = {}^t\mathbf{E}'Y'$ si ha

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta({}^t\mathbf{E}X, {}^t\mathbf{E}Y) = {}^tXAY = \beta({}^t\mathbf{E}'X', {}^t\mathbf{E}'Y') = {}^tX'A'Y'.$$

Considerato che $X = {}^tTX'$ ed $Y = {}^tTY'$ abbiamo

$$({}^tXAY) = {}^t({}^tTX')A({}^tTY') = {}^tX'(TA\,{}^tT)Y' = {}^tX'A'Y',$$

da cui

$$A' = TA\,{}^tT. \tag{3}$$

Si osservi che le equazioni (2) ed (3) sono differenti, a meno che la matrice T non sia ortogonale, cioè tale che ${}^tT = T^{-1}$.