$V_n(\mathbb{K})$ sp. vettoriale su $\mathbb{K}$

$\mathcal{B} \subseteq V_n(\mathbb{K})$ è detta base se è una seq. libera di generatori

$\mathcal{B} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$

1) Se $V_n(\mathbb{K}) \neq \{\bar{0}\}$ e f.g. $\Rightarrow V_n(\mathbb{K})$ ammette basi
2) OGNI 2 basi di $V_n(\mathbb{K})$ hanno lo stesso numero di elementi
3) Ogni vettore di $V_n(\mathbb{K})$ si scrive in modo unico come c. lineare dei vettori di una sua base.

DIMENSIONE DI $V_n(\mathbb{K})$ =
- 0 se $V_n(\mathbb{K}) = \{\bar{0}\}$
- ∞ se $V_n(\mathbb{K})$ non è f.g.
- $n = |\mathcal{B}|$ ove $\mathcal{B}$ base di $V_n(\mathbb{K})$ altrimenti

DATE 2 BASI COME SONO DEFINITE LE COMPONENTI DEI VETTORI DI $V_n(\mathbb{K})$.

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$

$$\psi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to V_n(\mathbb{K}) \\ (a_1 \dots a_n) \to a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n \end{cases}$$

$$\psi_{\mathcal{B}'} : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to V_n(\mathbb{K}) \\ (a'_1 \dots a'_n) \to a'_1\bar{e}'_1 + \dots + a'_n\bar{e}'_n \end{cases}$$

In particolare $(a'_1 \dots a'_n) = (\psi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \psi_{\mathcal{B}})(a_1 \dots a_n)$

$(a'_1 \dots a'_n)$: componenti rispetto $\mathcal{B}'$

$(a_1 \dots a_n)$: componenti rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\bar{v} = a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n$$
$$= a'_1\bar{e}'_1 + \dots + a'_n\bar{e}'_n$$

$$[a_1\ a_2 \dots a_n]\begin{bmatrix}\bar{e}_1\\ \vdots\\ \bar{e}_n\end{bmatrix} = [a'_1 \dots a'_n]\begin{bmatrix}\bar{e}'_1\\ \vdots\\ \bar{e}'_n\end{bmatrix}$$

($\bar{E}$ sopra la matrice di sinistra; $\bar{E}'$ sopra la matrice di destra)

${}^tX$ = componenti di $\bar{v}$ rispetto $\mathcal{B}$

${}^tX'$ = componenti di $\bar{v}$ rispetto $\mathcal{B}'$.

$${}^tX\,\bar{E} = {}^tX'\bar{E}'$$

scrivere $\bar{E}'$ in termini di $\bar{E}$

Supponiamo ${}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{n1} \\ a_{12} & \\ \vdots & \\ a_{1n} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$

ove $\bar{e}'_i = a_{1i}\bar{e}_1 + a_{2i}\bar{e}_2 + \ldots + a_{ni}\bar{e}_n$

$\bar{E}' = {}^tA\,\bar{E} \Rightarrow$

$\Rightarrow {}^tX\,\bar{E} = {}^tX'({}^tA\,\bar{E}) = ({}^tX'{}^tA)\,\bar{E}$

↓ coord. rispetto $\mathcal{B}$

↓ coord. rispetto a $\mathcal{B}$

Inversa ${}^tX = {}^tX'{}^tA \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{X = AX'}$

oss: la matrice A è invertibile.

Infatti se $X = AX'$ (coord. di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ in f.ne delle coord. rispetto $\mathcal{B}'$).

e $X' = A'X$ (coord. di $\bar{v}$ rispetto $\mathcal{B}'$ in f.ne delle coord. rispetto a $\mathcal{B}$)

$$\Rightarrow X = AX' = A(A'X) = (AA')X$$

$$\Rightarrow AA' = I \Rightarrow A' = A^{-1}$$

[Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta invertibile se $\exists A' \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $AA' = A'A = I_n$]

Siano $V_n(\mathbb{K})$ e $W_m(\mathbb{K})$ due sp. vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensioni n ed m.

e sia $f: V_n \longrightarrow W_m$ una funzione lineare.

Siano $\mathcal{B}=(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ e $\mathcal{B}'=(\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_m)$ basi di V e W.

oss 1: $\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$: $\exists (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^n$ tali che

$$\bar{v} = a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n$$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) = a_1 f(\bar{e}_1) + \dots + a_n f(\bar{e}_n).$$

a) l'immagine di f è generata da $f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n)$

b) l'immagine di $f(\bar{v})$ dipende solo dalle componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e $f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n)$.

Def: Si dice **rango** di $f: V \to W$ la dimensione di $\mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\mathrm{rk}(f) := \dim \mathrm{Im}(f).}$$

Si dice **nullità** di $f: V \to W$ la dimensione di $\ker(f)$.

$$\boxed{\mathrm{null}(f) := \dim \ker(f).}$$

$$\mathrm{rk}(f) = \dim \mathcal{L}(f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n)) \leq \min(m, n)$$

è minore o uguale a n perché n vettori

minore o uguale a m perché sono vettori di W ed in W ogni sist. libero ha al più m vettori.

Teorema (nullità + rango).

Sia $f: V_n(\mathbb{K}) \to W(\mathbb{K})$ una funzione lineare e $\dim V_n(\mathbb{K}) = n$.

ALLORA $\boxed{rk(f) + null(f) = n}$

nullità di f + rango di f = dim dominio di f

DIM: Sia $R = \ker(f) \Rightarrow R$ è sottospazio vettoriale di V

se $R = \{0\} \Rightarrow null(f) = 0$.

Sia in questo caso $\bar{v} = a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n \in V$

e supponiamo $f(\bar{v}) = a_1 f(\bar{e}_1) + \dots + a_n f(\bar{e}_n) = 0$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \Rightarrow$ l'unica c. lineare di $f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n)$ che dà 0 è a coeff. tutti nulli $\Rightarrow$

$(f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n))$ è una seq. libera di vettori di $\mathrm{Im}(f)$ e genera $\mathrm{Im}(f) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = n \Rightarrow$

$\mathrm{null}(f) + \mathrm{rk}(f) = 0 + n = n$

[incidentalmente: se $\ker f = \{0\} \Rightarrow f$ manda sequenze libere in sequenze libere].

Supponiamo ora $\ker(f) \neq \{0\} \Rightarrow \dim \ker f \geq 1$

e sia $t = \mathrm{null}(f) = \dim \ker f$ e

$\mathcal{B}_0 = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_t)$ una base di $\ker f$.

Siano ora $(\bar{e}_{t+1} \dots \bar{e}_n)$ dei vettori che aggiunti a $\mathcal{B}_0$ danno una base di V

$$\mathcal{B} = (\underbrace{\bar{e}_1\ \bar{e}_2 \dots \bar{e}_r}_{r \text{ vettori}}\ \underbrace{\bar{e}_{r+1} \dots \bar{e}_n}_{n-r \text{ vettori}})$$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}\left(f(\bar{e}_1)\ f(\bar{e}_2) \dots f(\bar{e}_r)\ f(\bar{e}_{r+1}) \dots f(\bar{e}_n)\right)$$

$$= \mathcal{L}\left(f(\bar{e}_{r+1}) \dots f(\bar{e}_n)\right)$$

$$\dim \mathrm{Im}(f) \leq n-r$$

<u>oss</u> $f(\bar{e}_{r+1}) \dots f(\bar{e}_n)$ sono una seq. libera.

Infatti, se fossero legati $\Rightarrow \exists\ \beta_{r+1} \dots \beta_n$ tali che $(\beta_{r+1} \dots \beta_n) \neq (0 0 \dots 0)$ e

$$\beta_{r+1} f(\bar{e}_{r+1}) + \dots + \beta_n f(\bar{e}_n) = 0$$

$$\| $$

$$f(\beta_{r+1}\bar{e}_{r+1} + \dots + \beta_n \bar{e}_n) = 0$$

$$\Rightarrow \beta_{r+1}\bar{e}_{r+1} + \dots + \beta_n \bar{e}_n \in \ker f$$

ma anche $\beta_{r+1}\bar{e}_{r+1} \dots + \beta_n \bar{e}_n \neq 0$

ma $\ker f$ è generato da $\bar{e}_1 \dots \bar{e}_r \Rightarrow$

$$\Rightarrow \beta_{r+1}\bar{e}_{r+1} + \dots + \beta_n \bar{e}_n = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_r \bar{e}_r$$

e dunque $\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_r \bar{e}_r - \beta_{r+1}\bar{e}_{r+1} \dots - \beta_n \bar{e}_n = 0$

con coeff. non tutti zero $\forall$ perché B base e dunque libera.

$$[f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n)] =$$

$$= \left[{}^t\bar{E}' \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} {}^t\bar{E}' \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \dots {}^t\bar{E}' \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right] =$$

$$= {}^t\bar{E}' \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

↑ coup d' $f(\bar{e}_1)$ ↑ $f(\bar{e}_2)$ ↑ $\dots f(\bar{e}_n)$

→ A matrice che rappresenta f rispetto a B e B'.

$$\Rightarrow \quad \dim \mathrm{Im}(f) = n - t = \mathrm{rk}(f)$$

$$\dim \ker(f) = t = \mathrm{null}(f)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{rk}(f) + \mathrm{null}(f) = n}$$

□

Rappresentazione di applicazioni lineari mediante matrici.

$$f : V_n(\mathbb{K}) \to W_m(\mathbb{K}) \text{ lineare.}$$

$$\forall \bar{v} \in V : \bar{v} = a_1 \bar{e}_1 + \dots + a_n \bar{e}_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) = a_1 f(\bar{e}_1) + a_2 f(\bar{e}_2) + \dots + a_n f(\bar{e}_n) =$$

$$= \begin{bmatrix} f(\bar{e}_1) & f(\bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

In W abbiamo una base $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_m')$

$$\Rightarrow \begin{aligned} f(\bar{e}_1) &= a_{11}\bar{e}_1' + a_{21}\bar{e}_2' + \dots + a_{m1}\bar{e}_m' \\ f(\bar{e}_2) &= a_{12}\bar{e}_1' + a_{22}\bar{e}_2' + \dots + a_{m2}\bar{e}_m' \\ &\vdots \\ f(\bar{e}_n) &= a_{1n}\bar{e}_1' + a_{2n}\bar{e}_2' + \dots + a_{mn}\bar{e}_m' \end{aligned}$$

l'applicazione f dipende solo da $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ (m, n) ed i coefficienti: $(a_{ij})_{i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n}$

$$f(\bar{e}_1) = {}^t\bar{E}' \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \qquad f(\bar{e}_2) = {}^t\bar{E}' \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \dots$$

$$f(a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n) = {}^t\bar{E}'\, A \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

In particolare se interessano le componenti di $f(\bar{v})$ rispetto $\mathcal{B}'$ $\Rightarrow$ queste sono date da $\boxed{Y = AX}$ con X vettore delle componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

la matrice A descrive f fissate le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

Siano U, V, W tre sp. vettoriali

$f: U \to V$ applicazioni lineari

$g: V \to W$

$\dim U = n$, $\dim V = k$ $\dim W = m$

Basi: $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$

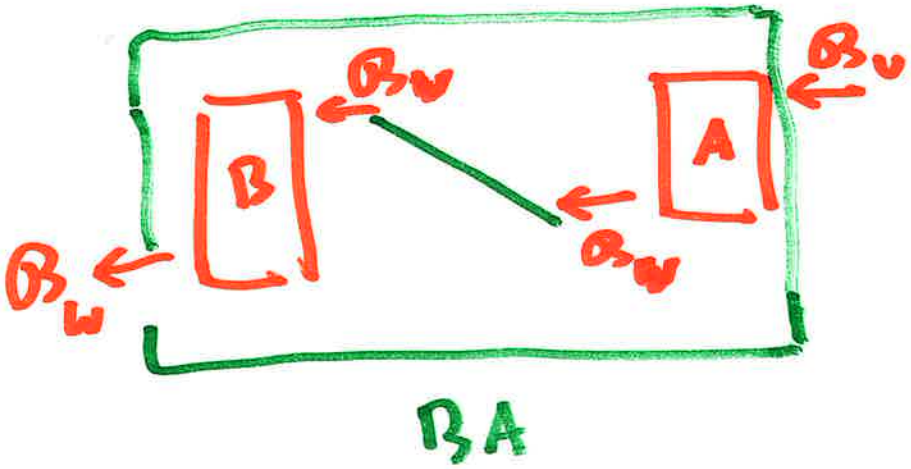
$(g \circ f)$ è ben definita.

Sia A la matrice di f rispetto $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V$

B la matrice di g rispetto $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$

$A \in \mathbb{K}^{t,n}$ $\quad B \in \mathbb{K}^{m,t}$

BA è la matrice di $(g \circ f) : V \to W$ $\in \mathbb{K}^{m,n}$ rispetto $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$



$$BA = B\,[f(e_1) \dots f(e_n)] =$$

$$= [Bf(e_1) \dots Bf(e_n)] =$$

COROLLARIO se A, B, C sono 3 matrici tali che il prodotto

$$(A \cdot B)\,C$$

è definito $\Rightarrow$ $(AB)\cdot C = A\,(BC)$.

oss: In generale se abbiamo una funzione lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ e fissiamo le basi canoniche in entrambi gli spazi.

$\Rightarrow$ f è descritta univocamente dalla sua matrice A

$$f: \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ X \to AX \end{cases}$$

i vettori sono tutti vettori colonna.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad \dots \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}(f)$ è generato dalle colonne della matrice A

Def: Sia A una matrice. Si dice **rango** di A

il rango di una qualsiasi applic. lineare associata ad A ed esso coincide con la dimensione dello sp. vettoriale generato dalle colonne di A.

Il $rk(A)$ è la dim dello sp. vettoriale generato dalle colonne di $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

la nullità di A è $n - rk(A)$

$$\ker(A) := \{ X \in \mathbb{K}^n \mid AX = 0 \}.$$

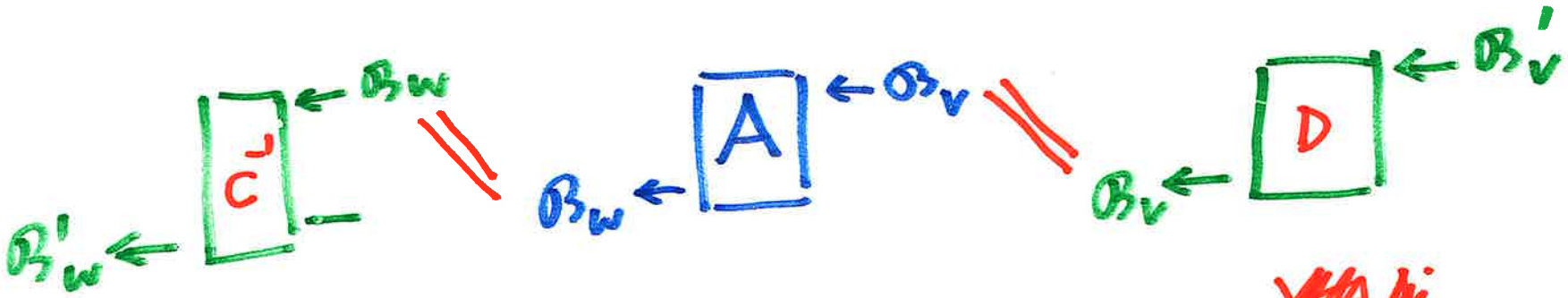
CAMBIAMENTI DI BASE E APPLICAZIONI LINEARI.

$$V_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\ f\ } W_m(\mathbb{K})$$

f lineare

$\mathcal{B}_V = (\bar{e}_1 \dots e_n)$ $\qquad$ $\mathcal{B}_W = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_m)$

$\mathcal{B}'_V = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$ $\qquad$ $\mathcal{B}'_W = (\bar{g}'_1 \dots \bar{g}'_m)$.



$y = Cy'$

$X = DX'$

$A' = C^{-1} A D$

In particolare se $V = W$. e $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W$
$\mathcal{B}'_V = \mathcal{B}'_W$

$$\Rightarrow \boxed{D^{-1} A D = A'} \qquad \begin{matrix} X = DX' \\ X' = D^{-1}X \end{matrix}$$

Def: Due matrici $A, A' \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono dette simili se $\exists\, P \in GL(n, \mathbb{K})$ matrice invertibile nxn tale che

$$\boxed{P^{-1} A P = A'}$$

$$AP = PA'$$

matrici simili rappresentano la stessa applicazione lineare $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ hanno lo stesso rango.