$V(\mathbb{K})$ sp. vettoriale.

→ sequenza libera di vettori

$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k) \in V(\mathbb{K})$ t.c.

$$a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_k\bar{v}_k = \underline{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

$$(a_1 \dots a_k) = (0 0 \dots 0)$$

→ sequenza di generatori.

$(\bar{g}_1 \dots \bar{g}_t)$ sequenza di vettori t.c.

che $\forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})$ $\exists$ $(a_1 \dots a_t) \in \mathbb{K}^t$ t.c. che

$$\bar{v} = a_1\bar{g}_1 + \dots + a_t\bar{g}_t$$

ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ è c. lineare di un numero finito di vettori di $(\bar{g}_1 \dots \bar{g}_t)$

Sia $\delta = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ una seq di vettori e sia

$$\psi_\delta : \begin{cases} \mathbb{K}^k \to V(\mathbb{K}) \\ (a_1 \dots a_k) \to a_1\bar{v}_1 + \dots + a_k\bar{v}_k \end{cases}$$

ψ_δ è lineare.

1) $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ è libera $\iff$
$\ker \psi_\delta = \{\bar{0}\}$ $\iff$
ψ_δ è iniettiva

2) $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ è di generatori $\iff$
ψ_δ è suriettiva.

Def: Una sequenza di vettori $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ di $V(\mathbb{K})$ è detta base $\iff$ essa è libera e di generatori
$\iff \psi_\delta$ è biiettiva.

OSS: Sia $\mathcal{B}$ una base $\Rightarrow \Psi_{\mathcal{B}}$ è biiettiva $\Rightarrow$ $\mathcal{B} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$

$\Rightarrow \Psi_{\mathcal{B}}$ è invertibile e possiamo

$$\Phi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} V(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n \\ \bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n \to (a_1 \dots a_n) \end{cases}$$

1) $\Phi_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo $= \Psi_{\mathcal{B}}^{-1}$

2) il vettore $(a_1 \dots a_n) = \Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v})$ è detto

vettore delle componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$

OGNI VETTORE DI $V(\mathbb{K})$ si scrive in componenti rispetto a $\mathcal{B}$ in modo unico!

Se $V(\mathbb{K})$ ammette una base di n elementi $\Rightarrow$
studiare $V(\mathbb{K})$ e studiare $\mathbb{K}^n$ è equivalente.

$\mathcal{B}$ base $\iff$ ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ si scrive in componenti rispetto a $\mathcal{B}$ in modo unico

DIM 1. $\mathcal{B}$ base $\iff$ $\Psi_{\mathcal{B}}$ isomorfismo $\iff$ $\exists \Psi_{\mathcal{B}}^{-1}$

isomorfismo $\Rightarrow$ ogni vettore appartiene ad $\text{im}(\Psi_{\mathcal{B}})$ $\Rightarrow$ si scrive come c.lineare di un numero finito di el. di $\mathcal{B}$.

e2) $\ker(\Psi_{\mathcal{B}}) = \{\underline{0}\}$ $\Rightarrow$ la funzione è iniettiva $\Rightarrow$ ogni vettore ha un'unica preimmagine. ∎

DIM 1. $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ di generatori $\Rightarrow$ $\forall$ vettore è c.lineare di un numero finito di el. di $\mathcal{B}$.

Supponiamo che ogni vettore in $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ si scriva in modo unico $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ $\underline{0}$ si scrive in modo unico $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ libera.

Se $\mathcal{B}$ libera e

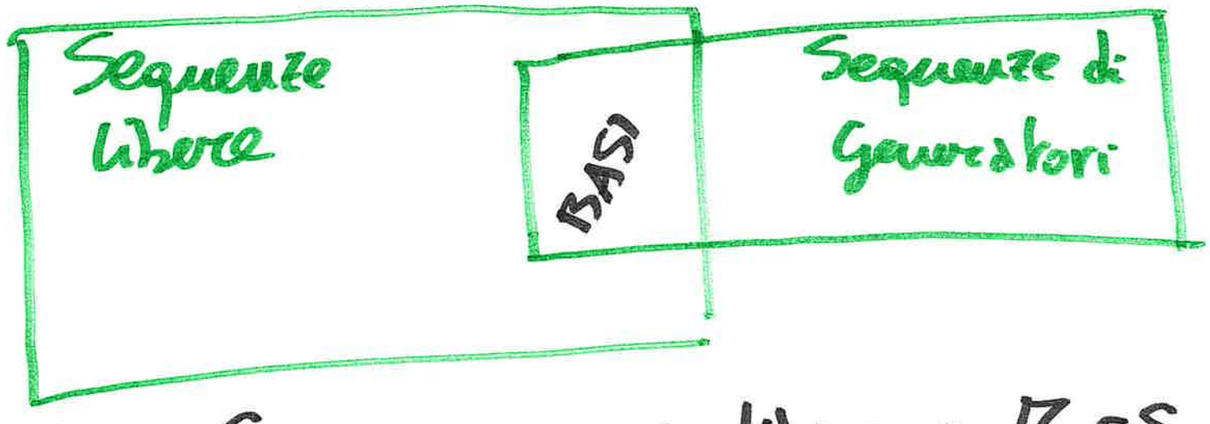
$\bar{v} = a_1\bar{b}_1 + \dots + a_n\bar{b}_n \qquad \mathcal{B} = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$

$= \beta_1\bar{b}_1 + \dots + \beta_n\bar{b}_n$

$\Rightarrow \underline{0} = \bar{v} - \bar{v} = (a_1 - \beta_1)\bar{b}_1 + \dots (a_n - \beta_n)\bar{v}_n \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 - \beta_1 = 0 = a_2 - \beta_2 = \dots = a_n - \beta_n$

$\Rightarrow a_1 = \beta_1, a_2 = \beta_2 \dots a_n = \beta_n$. □



Oss: • Sia S una sequenza libera e $\mathcal{C} \subseteq S$, $\mathcal{C} \neq \phi$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ è libera.

DIM: $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ $\mathcal{C} = (\bar{v}_2 \dots \bar{v}_i)$ con $i \leq n$

se $\mathcal{C}$ fosse legata $\Rightarrow \exists\, \beta_1 \dots \beta_i$ validi che

$\beta_1\bar{v}_1 + \dots + \beta_i\bar{v}_i = \underline{0}$ con $(\beta_1 \dots \beta_i) \neq (0 \dots 0)$

$\Rightarrow \beta_1\bar{v}_1 + \dots + \beta_i\bar{v}_i + 0\bar{v}_{i+1} + \dots + 0\bar{v}_n = \underline{0}$

con $(\beta_1 \dots \beta_i\ 0\ 0 \dots 0) \neq (0 0 0 \dots 0)$

$\Rightarrow$ Sarebbe legata G □

- Sia G una seq. di generatori e $X \subseteq V(\mathbb{K})$
  Allora $G \cup X$ è una seq. di generatori.

DIM: ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ è c.lineare di un numero finito di vettori di G e quindi, visto che $G \subseteq G \cup X$ anche di $G \cup X$. □

Le seq. libere sono "piccole"

Le seq. di generatori sono "grandi"

Es. in $\mathbb{R}^3$

$S = ((100), (010), (001))$ BASE

$S' = ((100), (010), (001), (234), (765), (813))$

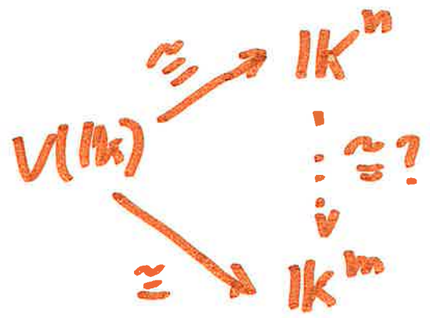
seq. di generatori.
ma non libera.

$S'' = ((100), (010))$ seq. libera
ma non di generatori.

- Se S sequenza di generatori per $V(\mathbb{K})$, $|S| < \infty$
  1) $V(\mathbb{K}) = \{0\}$ e $\mathcal{L}(\emptyset) = V(\mathbb{K})$
  2) $\exists S' \subseteq S$ con S' libera e $\mathcal{L}(S') = \mathcal{L}(S)$ e dunque di generatori.

→ DATA UNA SEQ. DI GEN. POSSIAMO SEMPRE

SEMPRE ESTRARRE UNA BASE A PATTO CHE $V(\mathbb{K}) \neq \{0\}$.



$|\mathcal{B}_1| = n$

$|\mathcal{B}_2| = m$

se $m \neq n$ possono $\mathbb{K}^m$ e $\mathbb{K}^n$ essere isomorfi??

No

Lemma di Steinitz: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e supponiamo che $\mathcal{A} = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$ sia una sequenza libera di suoi vettori e $\mathcal{B} = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ una seq. di suoi generatori:

$m, n < \infty$

ALLORA $|A| \leq |B|$ cioé $m \leq n$.

Una sequenza libera di vettori di $V(\mathbb{K})$ contiene al più tanti vettori quanti uno sono seq. di generatori.

DIM: per assurdo $m > n$

$$A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n \bar{a}_{n+1} \dots \bar{a}_m)$$
$$B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$$

Si ragiona ricorsivamente $i = 1 \dots n$

$i=1$ $\mathcal{L}(B) = V(\mathbb{K})$. $\bar{a}_1 \in B \Rightarrow$

1) $\exists (a_{11}, a_{12} \dots a_{1n}) \in \mathbb{K}^n$: $\bar{a}_1 = a_{11}\bar{b}_1 + \dots + a_{1n}\bar{b}_n$

2) $(a_{11} \dots a_{1n}) \neq (00 \dots 0)$ perché altrimenti $\bar{a}_1 = \underline{0}$

ma allora $\bar{a}_1 + 0\bar{a}_2 + \dots + 0\bar{a}_m = \underline{0}$ a coeff. non tutti uguali a zero $\Rightarrow$ A non sarebbe libera.

3) WLOG = Without loss of generality.

$a_{11} \neq 0 \Rightarrow a_{11}\bar{b}_1 = \bar{a}_1 - a_{12}\bar{b}_2 \dots - a_{1n}\bar{b}_n$

$\Rightarrow \bar{b}_1 = a_{11}^{-1}(\bar{a}_1 - a_{12}\bar{b}_2 \dots - a_{1n}\bar{b}_n)$ (*)

$\Rightarrow \bar{b}_1 \in \mathcal{L}((\bar{a}_1, \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n))$

$\mathcal{B}^{(1)} := (\bar{a}_1, \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$.

4) $\mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)}) = \mathcal{L}(\mathcal{B})$ cioè $\mathcal{B}^{(1)}$ è di generatori.

$\bar{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}) \Rightarrow \bar{v} = \beta_1\bar{b}_1 + \beta_2\bar{b}_2 + \dots + \beta_n\bar{b}_n =$

$= \beta_1\left[a_{11}^{-1}(\bar{a}_1 - a_{12}\bar{b}_2 \dots - a_{1n}\bar{b}_n)\right] + \beta_2\bar{b}_2 + \dots + \beta_n\bar{b}_n$

$\in \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)})$

viceversa se $\bar{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)}) \Rightarrow \bar{v} = \gamma_1\bar{a}_1 + \gamma_2\bar{b}_2 + \dots + \gamma_n\bar{b}_n =$

$$= \gamma_1 \left[a_{11}\bar{b}_1 + a_{21}\bar{b}_2 + \dots + a_{1n}\bar{b}_n \right] + \gamma_2 \bar{b}_2 + \dots + \gamma_n \bar{b}_n \in$$

$$\in \mathcal{L}(\mathcal{B}).$$

—

$A = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n\ \bar{a}_{n+1} \dots)$ LIBERA

$\mathcal{B} = (\bar{b}_1\ \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$ GEN

$\mathcal{B}^{(1)} = (\bar{a}_1\ \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$ GEN.

(i=1) $\bar{a}_2 \in A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{a}_2 = a_{21}\bar{a}_1 + a_{22}\bar{b}_2 + \dots + a_{2n}\bar{b}_n$

OSS: $(a_{22}, a_{23} \dots a_{2n}) \neq (0\,0 \dots 0)$ perché altrimenti

$\bar{a}_2 = a_{21}\bar{a}_1 \Rightarrow a_{21}\bar{a}_1 - \bar{a}_2 = \underline{0}$ ed A non sarebbe libera.

WLOG: $a_{22} \neq 0 \Rightarrow$

$$\bar{b}_2 = a_{22}^{-1}(\bar{a}_2 - a_{21}\bar{a}_1 - a_{23}\bar{b}_3 \cdots - a_{2n}\bar{b}_n)$$

$\Rightarrow \mathcal{B}^{(2)} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_3 \cdots \bar{b}_n)$

è tale che

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}^{(2)}) = \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)}) = \mathcal{L}(\mathcal{B}).$$

] dim come prima per $i=1$

e quindi $\mathcal{B}^{(2)}$ di generatori.

$i=n$

Dopo n passaggi otteniamo

$$A = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n\ \bar{a}_{n+1} \cdots a_m)$$

$$\mathcal{B} = (\bar{b}_1 \cdots \bar{b}_n)$$

$$\mathcal{B}^{(1)} = (\bar{a}_1\ \bar{b}_2 \cdots \bar{b}_n)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{B}^{(n)} = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n)$$

] di generatori

Osservidmo che $\bar{a}_{n+1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(n)}) =$

$= \mathcal{L}(\bar{a}_2 \dots \bar{a}_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \delta_1 \dots \delta_n$ reali che $\bar{a}_{n+1} = \delta_1 \bar{a}_1 + \dots + \delta_n \bar{a}_n$

$\Rightarrow \bar{a}_{n+1} - \delta_1 \bar{a}_1 \dots - \delta_n \bar{a}_n = \underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ λ legata $\forall$ CONTRO L'IPOTESI ASSURDO.

$\Rightarrow$ $\boxed{m \leq n}$ $\square$

CONSEGUENZE: Sia $V(\mathbb{K})$ uno s.vett. finitamente generato (f.g.)*

1) Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di $V(\mathbb{K}) \Rightarrow |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$.

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno s. vett. f.g.

- Se $V(\mathbb{K}) = \{0\}$ si pone $\dim V := 0$
- Se $V(\mathbb{K}) \neq \{0\}$ si pone $\dim V(\mathbb{K}) = n$ ove n è la cardinalità di una qualsiasi base.
- Se $V(\mathbb{K})$ non è f.g. $\Rightarrow \dim V = \infty$

Il numero $\dim V$ è detto **dimensione** di V.

oss: Se $V(\mathbb{K})$ è f.g. $\Rightarrow$ o $V(\mathbb{K}) = \{0\}$ oppure $V(\mathbb{K})$ ammette almeno una base in quanto si parte da un insieme di gen. finito e si applicano gli scarti successivi.

* $\exists\, S \subseteq V(\mathbb{K})$: $|S| < \infty$ e $\mathcal{L}(S) = V$.

2) Sia $V(\mathbb{K})$ uno s. vett. di dimensione $n < \infty$
$V_n(\mathbb{K})$ allora

2.a) non esistono in $V_n(\mathbb{K})$ seq. di generatori con meno di n vettori
[$\Rightarrow$ una seq. con meno di n vettori non genera]

2.b) non esistono in $V_n(\mathbb{K})$ seq. libere con più di n vettori
[$\Rightarrow$ una seq. con più di n vettori è legata]

3) Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno s. vettoriale di dimensione $n < \infty$

3.a) ogni sequenza di n generatori di $V_n(\mathbb{K})$ è libera [$\Rightarrow$ BASE]

3.b) ogni sequenza di n vettori liberi è di generatori [$\Rightarrow$ BASE].

4) Sia $V_n(\mathbb{K})$ s.vett. f.g.

4.a) ogni sequenza minimale di generatori ($\neq \phi$) è una base

4.b) ogni sequenza massimale di vett. liberi ($\neq \phi$) è una base.

DIM: 1) Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi di $V(\mathbb{K})$

$|\mathcal{B}| = m$, $|\mathcal{B}'| = n$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ libera, $\mathcal{B}'$ di generatori $\Rightarrow$

$\Rightarrow m \leq n$

$\mathcal{B}$ di generatori $\mathcal{B}'$ libera $\Rightarrow$

$\Rightarrow m \geq n$

$\Rightarrow m = n$

2) Supponiamo $\mathcal{B} = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ base

2.a) Se $G = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_m)$ di generatori con
$m < n \Rightarrow G$ ha meno vettori che non
la seq. libera $\mathcal{B} \Rightarrow$ by per STEINITZ.
$\Rightarrow m \geq n$.

2.b) Se $\mathcal{C} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)$ libera con $m > n$
$\Rightarrow \mathcal{C}$ ha più vettori che non le seq. di
generatori $\mathcal{B} \Rightarrow$ by per STEINITZ $\Rightarrow$
$\Rightarrow m \leq n$.

3.a) Sia $G = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ una seq. di generatori.
Se fosse legata $\Rightarrow$ possiamo applicare gli scarti
successivi ed avere $G' = G \setminus \{\bar{v}_i\}$ di generatori
con $|G'| = n-1 < n$ by per 2.a. $\Rightarrow G$ libera

3.b) Sia $\mathcal{C} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ libera. Se

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) \neq V \Rightarrow \exists\, \bar{w} \in V : \bar{w} \notin \mathcal{L}(\mathcal{C}).$$

La sequenza $\mathcal{C}' = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n\, \bar{w})$ sarebbe allora libera.

Infatti se fosse $\alpha_1\bar{v}_1 + \dots + \alpha_n\bar{v}_n + \beta\bar{w} = \underline{0}$

$\Rightarrow -\beta\bar{w} = \alpha_1\bar{v}_1 + \dots + \alpha_n\bar{v}_n$ ma $\bar{w}$ non app. alla chiusura di $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $\beta = 0$ e poiché $\mathcal{C}$ libera $\Rightarrow$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ in quanto $\alpha_1\bar{v}_1 + \dots + \alpha_n\bar{v}_n = \underline{0} = 0\bar{w}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}'$ perché $|\mathcal{C}'| = n+1 > n$ per (2.b). □

4.a) Sia $\mathcal{G}$ una sequenza finita di generatori

Se $|\mathcal{G}| = n \Rightarrow \mathcal{G}$ libera e nessun sott. di $\mathcal{G}$ propria ha n vettori $\Rightarrow \mathcal{G}$ minimale fra quelle di generatori. Se $|\mathcal{G}| > n \Rightarrow \mathcal{G}$ lunga $\Rightarrow$ APPLICHIAMO

gli scarti successivi.

4.b) Sia $\mathcal{C} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ una sequenza libera $\Rightarrow$ esiste una seq. libera di n vettori che contiene $\mathcal{C}$.

Teorema di completamento della base

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno s.vett. su $\mathbb{K}$ f.g. e sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una sua qualsiasi base.

Sia inoltre $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ una sua seq libera.

ALLORA esistono $(n-k)$ vettori in $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}' = (\bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_{n-k}})$ tali che

$S \cup \mathcal{B}' = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k \bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_{n-k}})$ sia una base di $V_n(\mathbb{K})$.

[Se S sequenza libera e $\mathcal{B}$ base, possiamo sempre completare a base S prendendo i

$\Downarrow$

esiste una base $\mathcal{B}$ che contiene $\mathcal{C}$.

- $\mathcal{C} = \mathcal{B} \Rightarrow$ $\mathcal{C}$ massimale
- $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{B} \Rightarrow$ $\mathcal{B}$ massimale fra le seq. libere che contengono $\mathcal{C}$.

vettori che inducono in $\mathcal{B}$ in modo opportuno].

DIM: $S = (\bar{v}_1 \dots v_k)$ LIBERA

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k \dots \bar{e}_n)$ GEN.

SOSTITUITE AD UNO AD UNO k vettori di $\mathcal{B}$ CON i K VETTORI DI S. come nella dim del lemma di STEINITZ.

ALLA FINE SI OTTIENE

$$\mathcal{B}^{(k)} = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{v}_1 \bar{e}_4 \dots \bar{v}_k \dots \bar{e}_n)$$

I vettori di $\mathcal{B}^{(k)} \setminus S$ sono quelli da aggiungere ad S per ottenere una base.

- $\mathcal{B}^{(k)}$ è di generatori; ha n vettori $\Rightarrow$ è una base.
- $S \subseteq \mathcal{B}^{(k)}$.

□

oss: $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = ((100), (010), (001))$

$S = ((110), (-110))$.

$(110) = (100) + (010) + 0(001)$

$\mathcal{B}'' = ((110), (010), (001))$

$(-110) = \underbrace{-1 \cdot (110)}_{\text{v.}} + 2(010) + \underbrace{0 \cdot (001)}_{\text{v}}$

$\mathcal{B}' = (\underbrace{(110), (-110)}_{S}, (001))$

$S' = ((011), (111))$

$(011) = 0(100) + 1(010) + 1(001)$

$\mathcal{B}'' = ((100)\ (011)\ (001))$

$$(111) = (100) + (011) + 0(001)$$

$$\mathcal{B}^{(e)} = ((111), (011), (001))$$

Teorema

[Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno s.vett. f.g. di dimensione n
$\Rightarrow V_n(\mathbb{K})$ è isomorfo a $\mathbb{K}^n$]

Def: In $\mathbb{K}^n$ si dice <u>base canonica</u> la base formata dai vettori $(\bar{e}_1, \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n)$ ove

$\bar{e}_1 = (1\,0 \dots 0)$
$\bar{e}_2 = (0\,1 \dots 0)$
$\vdots$
$\bar{e}_n = (0\,0 \dots 1)$

<u>oss:</u> Un vettore $(a_1 \dots a_n)$ di $\mathbb{K}^n$ ha componenti $(a_1 \dots a_n)$ rispetto la base canonica.

$\mathbb{K}^{2,2} := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$.

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ →→

$\Phi_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (a\ b\ c\ d) \in \mathbb{K}^4$

N.B. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq (a\ b\ c\ d)$

$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ↓←↑→

$\Phi_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (a\ c\ d\ b)$

A BASI DIFFERENTI CORRISPONDONO COMPONENTI DIFFERENTI!

S. vettoriale dei polinomi di grado al più 4

$\mathbb{K}[x]_{\leq 4}$ $\quad \mathcal{B}_0 = (1, x, x^2, x^3, x^4)$

~~ora~~

$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \to (a\ b\ c\ d\ e)$

$\mathcal{B}_1 = (1,\ 1+x+x^2+x^3+x^4,\ 1+2x+4x^2+8x^3+16x^4,$
$1-x+x^2-x^3+x^4,\ 1-2x+4x^2-8x^3+16x^4)$.

~~1-2x+~~

di $\quad a + b(1+x+x^2+x^3+x^4) + c(1+2x+4x^2+8x^3+16x^4)$
$+ d(1-x+x^2-x^3+x^4) + e(1-2x+4x^2-8x^3+16x^4)$
$= 0$

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=0 \\ b+2c-d-2e=0 \\ b+4c+d+4e=0 \\ b+8c-d-8e=0 \\ b+16c+d+16e=0 \end{cases}$$

$c=e$
$c=-e$ $\Rightarrow c=e=0$

$b+$

$$\begin{aligned} a+b+d&=0 \\ b-d&=0 \\ b+d&=0 \\ b-d&=0 \\ b+d&=0 \end{aligned}$$

$b=-d$
$b=d$ $\Rightarrow b=d=0$

$a=0$

Oss: Se $\dim V_n(\mathbb{K}) = n = \dim W_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$

$$V_n \cong W_n$$

perché $V_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n \cong W_n(\mathbb{K})$.

il viceversa lo verificheremo dopo, cioè che se

$$n \neq m \Rightarrow V_n(\mathbb{K}) \not\cong W_m(\mathbb{K}).$$

Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di $V_n(\mathbb{K})$

$$\Phi_{\mathcal{B}_1} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\Phi_{\mathcal{B}_2} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

come sono collegate $\Phi_{\mathcal{B}_1}$ e $\Phi_{\mathcal{B}_2}$?

→ sono le componenti di vettori rispetto basi diverse:

Se $(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \Phi_{\mathcal{B}_1}(\bar{v})$

$(\alpha_1' \dots \alpha_n') = \Phi_{\mathcal{B}_2}(\bar{v})$

$\Rightarrow (\alpha_1' \dots \alpha_n') = \Phi_{\mathcal{B}_2}(\Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\alpha_1 \dots \alpha_n))$

CAMBIAMENTO DI BASE.

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ BASE

$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ BASE. } DI $V_n(\mathbb{K})$

$$\bar{e}_1' = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n$$
$$\bar{e}_2' = a_{21}\bar{e}_1 + \dots + a_{2n}\bar{e}_n$$
$$\vdots$$
$$\bar{e}_n' = a_{n1}\bar{e}_1 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n$$

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_1' \\ \bar{e}_2' \\ \vdots \\ \bar{e}_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{E}' \qquad = \qquad A \qquad \bar{E}$$

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} := a_{i1}\bar{e}_1 + \cdots + a_{in}\bar{e}_n$$

$$\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + \cdots + v_n\bar{e}_n$$

$$= v_1'\bar{e}_1' + v_2'\bar{e}_2' + \cdots + v_n'\bar{e}_n' =$$

$= [v_1\ v_2 \dots v_n]\,\bar{E} =$

$= [v_1'\ v_2' \dots v_n']\,\bar{E}' = \bar{v}$

ma $\bar{E}' = A\bar{E} \Rightarrow$

$\Rightarrow [v_1'\ v_2' \dots v_n']\,\bar{E}' = [v_1\ v_2 \dots v_n]\,\bar{E}$

$$[v_1'\ v_2' \dots v_n']\,A\bar{E} = [v_1\ v_2 \dots v_n]\,\bar{E}$$

OSSERVIAMO CHE MOLTIPLICARE PER $\bar{E}$ CORRISPONDE A COSTRUIRE IL VETTORE DI COMPONENTI CIÓ CHE VIENE MOLTIPLICATO RISPETTO AD $\mathcal{B}$.

$[v_1' \dots v_n']\,A\bar{E} = [v_1 \dots v_n]\,\bar{E} \iff$

$[v_1' \dots v_n']\,A = [v_1 \dots v_n]$

cioè, passando ai trasposti:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = {}^tA \begin{bmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix}$$

formula di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$

${}^tA$ = matrice che ha come colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\Phi_{\mathcal{B}} \circ \Phi_{\mathcal{B}'}^{-1}(x)$$

si parte dalle componenti in $\mathcal{B}'$ e si arriva alle componenti in $\mathcal{B}$.