$$S = \{ p(x) \in \mathbb{Q}[x]_{\leq 4} : p(\sqrt{7}) = 0 \}.$$

$$S = \{ (x^2 - 7)(ax^2 + bx + c) \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \}.$$

$f : V \to W$ f lineare

$\bar{w} \in W$ $f(\bar{x}) = \bar{w}$ $x \in V$

- $\bar{w} \notin \mathrm{Im} f \Rightarrow \nexists x$
- $\bar{w} \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \cdot \ker f = \{0\} \Rightarrow \exists! x$
- $\ker f = L \Rightarrow L \neq \{0\}$.

Esiste una retta nel quale gli el. di $\ker f$.

Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n$

dei suoi vettori.

- Def: Si dice che i vettori $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n$ sono linearmente indipendenti (ovvero formano una sequenza libera di vettori) se l'unica loro combinazione lineare che dà $\underline{0}$ è a coefficienti tutti $= 0$.

Si dice che sono linearmente dipendenti (ovvero formano una sequenza legata) se non sono linearmente indipendenti.

liberi

$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ **indipendenti** $\iff$

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

legati

$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ **dipendenti** $\iff$

$\exists\, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tale che

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0}$$

oss: $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ è legata $\iff \exists\, \bar{v}_i \in (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ tale che

$$\bar{v}_i = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \beta_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \beta_n \bar{v}_n$$

Una sequenza è legata $\iff$ almeno uno dei suoi vettori è combinazione lineare dei rimanenti.

Dim: $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ legati $\Rightarrow \exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0 0 \dots 0)$:

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0}$$

Sia i tale che $\alpha_i \neq 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad -\alpha_i \bar{v}_i = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$$

$$\Rightarrow \bar{v}_i = (-\alpha_i)^{-1} (\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \dots)$$

Viceversa se

$$\bar{v}_i = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \beta_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \beta_n v_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_{i-1} \bar{v}_{i-1} - \bar{v}_i + \beta_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \beta_n \bar{v}_n = \underline{0}$$

↑ ha coeff. $-1 \neq 0$

$\Rightarrow (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ i legati. □

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale ed $X \subseteq V(\mathbb{K})$.

Chiamiamo $\mathcal{L}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i \;\middle|\; \bar{x}_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

copertura lineare dell'insieme X.

↓

insieme di tutte le combinazioni lineari di un numero finito di elementi di X.

Teorema:

1) $X \subseteq V(\mathbb{K}) \Rightarrow X \subseteq \mathcal{L}(X)$
2) $\mathcal{L}(X) \leq V(\mathbb{K})$ è sottospazio di $V(\mathbb{K})$
3) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(X)$
4) $X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(Y)$

5) $\mathcal{L}(X)$ è il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ che contiene X.

cioè

Se $X \subseteq W$ e $W \leq V(\mathbb{K}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X) \leq W$]

DIM 1) $\bar{x}_i$ è c.lineare di el. di X (1 elemento da solo)

$\Rightarrow \forall \bar{x}_i \in X : \bar{x}_i \in \mathcal{L}(X)$.

2) Siano $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{L}(X)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

mostriamo che $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \in \mathcal{L}(X)$.

$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i$ $\quad \bar{b} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{x}_i$

$\exists\, \bar{x}_1 \dots \bar{x}_m \in X$: $\quad \bar{a} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_m \bar{x}_m$

$\exists\, \bar{x}_{m+1} \dots \bar{x}_n \in X$: $\quad \bar{b} = \beta_{m+1} \bar{x}_{m+1} + \dots + \beta_n \bar{x}_n$

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_m \bar{x}_m + 0\,\bar{x}_{m+1} + \dots + 0\,\bar{x}_n$$

(0 — коэффициенты при $\alpha_{m+1}, \dots, a_n$)

$$b = 0\,\bar{x}_1 + \dots + 0\,\bar{x}_m + \beta_{m+1} \bar{x}_{m+1} + \dots \beta_n \bar{x}_n$$

(0 — коэффициенты при $\beta_1, \dots, \beta_m$)

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i \qquad b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{x}_i$$

$$(\lambda \bar{a} + \mu \bar{b}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{x}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda\alpha_i + \mu\beta_i)\overline{x_i} \in \mathcal{L}(X).$$

5) $\mathcal{L}(X)$ è sottospazio di $V(\mathbb{K})$ per (2)

$X \subseteq \mathcal{L}(X)$ per la (1).

Sia $W \leq V(\mathbb{K})$ con $X \subseteq W$.

$\Rightarrow$ ogni combin. lineare di un numero finito di elementi di W deve essere contenuta in $W \Rightarrow$ ogni c. lineare di un numero finito di elementi di X deve essere contenuta in $W \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq W$

3) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(X)$ in quanto

$\mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$ è più piccolo sottospazio che contiene $\mathcal{L}(X)$ ma $\mathcal{L}(X)$ era già sottospazio $\Rightarrow$ coincide $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$

4) $X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(Y)$ in quanto ogni c.lineare di un numero finito di el. di X è anche c.lineare di un numero finito di elementi di Y, poiché $X \subseteq Y$. □

$\mathcal{L}(X)$ è una operazione che associa a sottoinsiemi di uno sp. vettoriale $X \subseteq V(\mathbb{K})$ dei sottospazi di $V(\mathbb{K})$

$\mathcal{L}(X)$ è detta anche <u>chiusura lineare</u>

$$X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(Y)$$

se $\mathcal{L}(X) \subseteq V(\mathbb{K})$

se $W \subseteq V(\mathbb{K}) \Rightarrow \mathcal{L}(W) = W$

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(X)$$

$\mathbb{R}^{os}$

<u>oss</u>: $\mathcal{L}(\phi) := \{0\}$.

<u>Def</u>: Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale $X \subseteq V(\mathbb{K})$.
X è detto <u>insieme di generatori</u> per $V(\mathbb{K})$ se

$\mathcal{L}(X) = V(\mathbb{K})$

cioè ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ è c. lineare di un numero finito di vettori di X.

$V(\mathbb{K})$ è detto **finitamente generato** se $\exists X \subseteq V(\mathbb{K})$ con $|X| = n < \infty$ tale che $\mathcal{L}(X) = V(\mathbb{K})$.

Esempi

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 3} := \mathcal{L}(\{1, x, x^2, x^3\}) =$$

$$= \{ a \cdot 1 + b \cdot x + c x^2 + d x^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}.$$

$$S_2 = \mathcal{L}(\{\uparrow, \rightarrow\})$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}\left((100),(010),(001)\right)$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}\left((110),(011),(111),(023)\right)$$

$$\mathbb{R}[x] = \mathcal{L}\left(\{x^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}\right)$$

$$\mathbb{R}^{2,2} = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\right\}\right).$$

oss: Siano $V(\mathbb{K})$ e $W(\mathbb{K})$ due sp. vettoriali su $\mathbb{K}$ e $f: V \to W$ una applicazione lineare. Sia inoltre X un insieme di generatori per $V(\mathbb{K}) \Rightarrow f(X) = \{f(\bar{x}) \mid \bar{x} \in X\}$ è un insieme di

generatori per $\mathrm{Im}(f)$.

DIM: Sia $\bar{y} \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow \exists \bar{x} \in V : f(\bar{x}) = \bar{y}$

ma X è di generatori per $V \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in X : \quad \bar{x} = a_1\bar{x}_1 + \dots + a_n\bar{x}_n$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) = f(a_1\bar{x}_1 + \dots + a_n\bar{x}_n) =$$

$$= a_1 f(\bar{x}_1) + \dots + a_n f(\bar{x}_n)$$

$$\Rightarrow \bar{y} \in \mathcal{L}\left(f(\bar{x}_1) \dots f(\bar{x}_n)\right) \subseteq \mathcal{L}(f(X))$$

Supponiamo $\bar{y} \in \mathcal{L}(f(X)) \Rightarrow \bar{y} = a_1 f(\bar{x}_1) + \dots + a_n f(\bar{x}_n) =$

$$= f(\underbrace{a_1\bar{x}_1 + \dots + a_n\bar{x}_n}_{\bar{x}}) = f(\bar{x}) \Rightarrow \bar{y} \in \mathrm{Im}\, f$$

□

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ 4x+2y=3 \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}((1,0),(0,1))$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \to (2x+y, 4x+2y)$

$f(x,y) = (2,3)$? è risolubile

$\Leftrightarrow (2,3) \in Im(f)$

$\Leftrightarrow (2,3) \in \mathcal{L}(f(1,0), f(0,1)) =$

$= \mathcal{L}((2,4),(1,2)) = \mathcal{L}((1,2))$ no

Il sistema non ha soluzione!

OSS: Sia X un insieme di generatori per $V(\mathbb{K})$. Se X è legato $\Rightarrow$

$$\exists \bar{x} \in X : \quad \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{\bar{x}\}).$$

→ DATO UN SISTEMA DI GENERATORI LEGATO POSSIAMO SEMPRE TOGLIERE UN SUO ELEMENTO ED OTTENIAMO ANCORA UN SISTEMA DI GENERATORI

→ in particolare se $|X| = n < \infty$ e $\mathcal{L}(X) \neq \{0\}$

$\Rightarrow \exists\, Y \subseteq X$ con Y libero e $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(X)$

METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI

DIM.

$X = \{\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n, \dots\}$ un insieme di vettori.

se X è libero $\Rightarrow$ **FINE**

Supponiamo X legato $\Rightarrow \exists\, \bar{x}_1 \in X : \bar{x}_1 = \sum_{i=2}^{n} \beta_i \bar{x}_i$

Sia $\bar{z} \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \bar{z} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{x}_i =$

$$= \alpha_2 \bar{x}_1 + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \bar{x}_i =$$

$$= \alpha_1 \sum_{i=2}^{n} \beta_i \bar{x}_i + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \bar{x}_i =$$

$$= \sum_{i=2}^{\hat{n}} (\alpha_1 \beta_i + \alpha_i) \bar{x}_i \in \mathcal{L}(X \setminus \{\bar{x}_1\})$$

$$\mathcal{L}(X \setminus \{\bar{x}.\bar{y}\}) \subseteq \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(X \setminus \{\bar{x}.\bar{y}\})$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{\bar{x}.\bar{y}\}).$$

ALGORITMO: Sia X un insieme di generatori per $\mathcal{L}(X) = V(\mathbb{K})$.

METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI

ALLORA

1) Se X libero → fine
2) Se $X = \emptyset$ → fine.
3) Se X legato $\Rightarrow \exists \bar{x} \in X : \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{\bar{x}\})$

$\Rightarrow$ sostituisco ad $X \leftarrow X \setminus \{\bar{x}\}$

e torno al punto 1

COROLLARIO: OGNI SP. VETTORIALE NON BANALE ($\neq \{0\}$) FINITAMENTE GENERATO AMMETTE ALMENO UNA SEQUENZA LIBERA DI GENERATORI

DEF: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale (finitamente generato). Si dice **BASE (ordinata)** ogni sua sequenza libera di generatori.

[BASE NON ORDINATA = insieme di generatori liberi]

$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}((100),(010),(001))$

$\alpha(100) + \beta(010) + \gamma(001) = (\alpha, \beta, \gamma) = (000)$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

$((100),(010),(001))$ è una base. → base canonica.

Def: In $\mathbb{K}^n$ la sequenza di vettori

$\bar{e}_1 = (100\ldots0)$

$\bar{e}_2 = (010\ldots0)$

$\vdots$

$\bar{e}_n = (000\ldots1)$

è una base ordinata detta **base canonica**.

$$\alpha(110)+\beta(021)+\gamma(111)+\delta(023)=(000)$$

$$(\alpha+\gamma,\ \alpha+\beta+\gamma+2\delta,\ \beta+\gamma+3\delta)=(000)$$

$$\alpha=-\gamma \qquad \beta=-2\delta \qquad \gamma=-\delta$$

$$\Rightarrow \quad \alpha=\delta,\ \beta=-2\delta,\ \gamma=-\delta$$

Le veq. è legata.

$$(110)-2(011)-(111)+(023)=(000)$$

$$L\left((110),(011),(111)\right)=\mathbb{R}^3$$

$$a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+b+e & c-d+e+f \\ c+d+f & a-b+e-f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B}$ una sua base ordinata.
Supponiamo $|\mathcal{B}| = n < \infty$.
Allora ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ si scrive in modo unico come c.lineare ordinata

dei vettori di $\mathcal{B}$.

DIM: $\mathcal{B}$ è una base $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori per $V(\mathbb{K})$

$\Rightarrow$ ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ è c. lineare di un numero finito di elementi di

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$\Rightarrow \forall \bar{v} \in V \quad \exists (v_1 \dots v_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + \dots + v_n\bar{e}_n$$

Supponiamo ora

$$\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + \dots + v_n\bar{e}_n$$
$$= w_1\bar{e}_1 + \dots + w_n\bar{e}_n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{0} = \bar{v} - \bar{v} = (v_1\bar{e}_1 + \dots + v_n\bar{e}_n) - (w_1\bar{e}_1 + \dots + w_n\bar{e}_n) =$$

$$= (v_1 - w_1)\bar{e}_1 + (v_2 - w_2)\bar{e}_2 + \dots + (v_n - w_n)\bar{e}_n$$

$\mathcal{B}$ è libera $\Rightarrow$ $v_1 - w_1 = 0 \Rightarrow v_1 = w_1$

$v_2 - w_2 = 0 \Rightarrow v_2 = w_2$

$\vdots$

$v_n - w_n = 0 \Rightarrow v_n = w_n$

□

Teorema: Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato con una base $\mathcal{B}$. formata da n vettori.
Allora $\exists$ un isomorfismo

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

DIM:

$$\Phi_{\mathcal{B}}(a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + \dots + a_n\bar{e}_n) := (a_1 \dots a_n)$$

- $a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + \dots + a_n\bar{e}_n$: vettore $\bar{v} \in V$ di componenti $(a_1\ a_2 \dots a_n)$ rispetto a $\mathcal{B}$
- $(a_1 \dots a_n)$: vettore delle componenti in $\mathbb{K}^n$

che $\Phi_{\mathcal{B}}$ sia iniettiva segue dal fatto che

~~$\ker \Phi_{\mathcal{B}} = \{(a_1 \dots a_n) : a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n$~~

$$\ker \Phi_{\mathcal{B}} = \{\bar{v} \in V(\mathbb{K}) : \bar{v} = 0\cdot\bar{e}_1 + \dots + 0\cdot\bar{e}_n\} = \{\bar{0}\}.$$

iniettiva

$$\forall (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^n: \quad \Phi_{\mathcal{B}}(a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n) = (a_1 \dots a_n)$$

suriettiva.

$$\bar{u} \in V(\mathbb{K}) \Rightarrow \bar{u} = \sum \alpha_i \bar{e}_i$$
$$\bar{w} \in V(\mathbb{K}) \qquad w = \sum \beta_i \bar{e}_i$$

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\lambda \bar{u} + \mu \bar{w}) = \Phi_{\mathcal{B}}\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{e}_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{e}_i\right) =$$

$$= \Phi_{\mathcal{B}}\left(\sum (\lambda a_i + \mu \beta_i) \bar{e}_i\right) =$$

$$= (\lambda a_1 + \mu \beta_1 \quad \lambda a_2 + \mu b_2 \ldots \quad \lambda a_n + \mu \beta_n) =$$

$$= \lambda (a_1 \ldots a_n) + \mu (\beta_1 \ldots \beta_n) = \lambda \Phi_{\mathcal{B}}(\bar{u}) + \mu \Phi_{\mathcal{B}}(\bar{w})$$