- Spazio vettoriale su di un campo $\mathbb{K}$. $V(\mathbb{K})$
- Sottospazio vettoriale W

$(V, +)$ gruppo dei vettori

- $\mathbb{K} \times V \to V$ prodotto per scalare

$1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$

$(\alpha+\beta) \cdot \bar{v} = \alpha \cdot \bar{v} + \beta \bar{v}$

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \bar{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{v})$

$\alpha \cdot (\bar{v} + w) = \alpha \cdot \bar{v} + \beta \cdot \bar{w}$

$W \subseteq V$ è sottospazio $\iff \forall \bar{u}, \bar{w} \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:
$W \neq \emptyset$ $\alpha \bar{u} + \beta \bar{w} \in W$

Siano $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \dots \bar{u}_k$ vettori di $V(\mathbb{K})$

$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ scalari di $\mathbb{K}$

$\Rightarrow \alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + \dots + \alpha_k\bar{u}_k$ è detta combinazione lineare dei vettori $\bar{u}_1 \dots \bar{u}_k$ con gli scalari $\alpha_1 \dots \alpha_k$.

$W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$ è sottospazio $\Leftrightarrow \forall \bar{u}, \bar{w} \in W \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} \in W$.

cioè "W è chiuso rispetto le comb. lineari di 2 qualsiasi suoi elementi".

$\Leftrightarrow$ W è chiuso rispetto comb. lineari di un numero finito di suoi elementi.

$\bar{u}_i \in W$

$$\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \dots + \alpha_{n-1} \bar{u}_{n-1} + \alpha_n \bar{u}_n =$$

$$= \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \dots + (\alpha_{n-1} \bar{u}_{n-1} + \alpha_n \bar{u}_n) =$$

$$\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_{n-2} \bar{u}_{n-2} + \bar{w} \qquad \text{con } w \in W$$

$$\bar{w} = \alpha_{n-1} \bar{u}_{n-1} + \alpha_n \bar{u}_n$$

Esempi di spazi vettoriali (e sottospazi).

$\mathbb{K}$: campo $\rightarrow$ $\mathbb{K}(\mathbb{K})$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $V = (S_2, +)$ vettori liberi.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $V = (\mathbb{R}^2, +)$

$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

$\alpha \cdot (a,b) = (\alpha a, \alpha b)$

$\mathbb{K}$ campo; $(\mathbb{K}^n, +)$

$$(a_1 a_2 \dots a_n) + (b_1 b_2 \dots b_n) = (a_1+b_1 \dots a_n+b_n)$$

$$\alpha \cdot (a_1 a_2 \dots a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$$

$$1 \cdot (a_1 \dots a_n) = (1a_1 \dots 1a_n) = (a_1 \dots a_n)$$

$$(\alpha \cdot \beta)(a_1 \dots a_n) = ((\alpha\beta)a_1 \dots (\alpha\beta)a_n) =$$

$$= (\alpha(\beta a_1) \dots \alpha(\beta a_n)) =$$

$$= \alpha(\beta a_1 \dots \beta a_n) =$$

$$= \alpha \cdot (\beta \cdot (a_1 \dots a_n))$$

pseudo distributive: in modo analogo.

$\dashv$

$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$. $\quad \mathbb{Z}_2 := \{0,1\}$

$\mathbb{Z}_2^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{Z}_2\} = \{(000),(001),(010),(011),$
$(100),(101),(110),(111)\}$.

N.B. : Se $|\mathbb{K}| \geq \infty \Rightarrow$ ogni sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ diverso da $\{\underline{0}\}$ ha infiniti vettori.

$\mathbb{R}^3$ ha infiniti vettori!!

$\{\underline{0}\}$ è sempre spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Se $V(\mathbb{K}) \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow |V(\mathbb{K})| \geq |\mathbb{K}|$

Se $\bar{v} \in V(\mathbb{K}) \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{K}: \alpha\bar{v} \in V(\mathbb{K})$
$\bar{v} \neq \underline{0}$

$\varphi: \mathbb{K} \to V(\mathbb{K})$ $\quad v \neq 0$

$\alpha \to \alpha \bar{v}$

ed osserviamo che $\alpha \bar{v} = \beta \bar{v} \iff$

$\iff (\alpha - \beta) \cdot \bar{v} = 0$

$\iff \alpha - \beta = 0 \iff \alpha = \beta.$

φ è iniettiva.

$\lceil$ $\mathbb{K}$ campo; X un insieme $\quad h \geq 1$

$$V(\mathbb{K}) := \{ f : X \to \mathbb{K}^h : f \text{ funzione} \}.$$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha \cdot f(x)$$

$\rfloor$

Es. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$; $X=\mathbb{N}_0 \Rightarrow f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ è una successione

$$(a_0\ a_1 \dots a_n \dots) + (b_0\ b_1 \dots b_n \dots) =$$

$$= (a_0+b_0\ \ a_1+b_1 \dots \ \ a_n+b_n \dots)$$

$$\alpha(a_0\ a_1 \dots a_n \dots) = (\alpha a_0\ \alpha a_1 \dots \alpha a_n \dots)$$

DEF. $\mathbb{K}$ campo $V(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

spazio vettoriale dei polinomi a coeff. in $\mathbb{K}$.

N.B. Un polinomio ha sempre grado finito!
è una sommatoria di un numero finito di termini.

→ corrisponde alle succ. in cui $\forall (a_0 \dots a_n \dots)$
$\exists M : i > M : a_i = 0$

$\mathbb{K}$ campo $\quad V(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[x]_{\leq t} =$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^{t} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

polinomi di grado al più t

$\mathbb{K}[x]_{\leq t} \leq \mathbb{K}[x]$

$\mathbb{K}[x]_{\leq t}$ è sottospazio di $\mathbb{K}[x]$

verifica: dati 2 polinomi di deg $\leq t$ le loro c. lin. appartengono ancora a $\mathbb{K}[x]_{\leq t}$.

DIM: $\quad p(x) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^i \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{t} b_i x^i$

$$\Rightarrow \quad \alpha p(x) + \beta q(x) = \alpha \sum_{i=0}^{t} a_i x^i + \beta \sum_{i=0}^{t} b_i x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{t} (\alpha a_i) x^i + \sum_{i=0}^{t} (\beta b_i) x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{t} (\alpha a_i + \beta b_i) x^i \in \mathbb{K}[x]_{\leq t}$$

oss: Un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^i$ è univocamente descritto dai suoi coeff. $(a_0 a_1 \dots a_t) \in \mathbb{K}^{t+1}$

$\mathbb{K}[x]_{\leq t}$	$\mathbb{K}^{t+1}$
$p(x) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^i$	$(a_0 a_1 \dots a_t) = \bar{v}$
$\alpha \cdot p(x) = \sum (\alpha a_i) x^i$	$\alpha \cdot \bar{v} = (\alpha a_0 \dots \alpha a_t)$
$p(x) + q(x) = \sum a_i x^i + \sum b_i x^i$ $= \sum (a_i + b_i) x^i$	$\bar{u} + \bar{v} = (a_0 \dots a_t) + (b_0 \dots b_t)$ $= (a_0 + b_0 \dots a_t + b_t)$.

Def: Sia $\mathbb{K}$ un campo e $\mathcal{U}(\mathbb{K})$, $V(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

Una funzione $f: \mathcal{U}(\mathbb{K}) \to V(\mathbb{K})$ è detta **lineare** se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{u}, \bar{w} \in \mathcal{U}$:

$$f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{w}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{w}).$$

f manda combinazioni lineari di vettori di $\mathcal{U}$ in combinazioni lineari di vettori di V

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \; \forall \bar{u} \in \mathcal{U}: \; f(\alpha \bar{u}) = \alpha f(\bar{u})$$

$$\forall \bar{u}, \bar{w} \in \mathcal{U}: \; f(\bar{u} + \bar{w}) = f(\bar{u}) + f(\bar{w}).$$

f lineare $U(\mathbb{K}) \to V(\mathbb{K})$ è detta

isomorfismo se f è invertibile.

Esercizio $\mathbb{K}[x]_{\leq t}$ e $\mathbb{K}^{t+1}$ sono isomorfi.

$$f: \begin{cases} \mathbb{K}[x]_{\leq t} \longrightarrow \mathbb{K}^{t+1} \\ \sum_{i=0}^{t} a_i x^i \longrightarrow (a_0\, a_1 \dots a_t) \end{cases}$$

$$f^{-1}: \begin{cases} \mathbb{K}^{t+1} \longrightarrow \mathbb{K}[x]_{\leq t} \\ (a_0\, a_1 \dots a_t) \longrightarrow \sum_{i=0}^{t} a_i x^i \end{cases}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\forall n$

$$\begin{cases} \mathbb{C}[X]_{\leq t} \longrightarrow \mathbb{C}^{t+1} \\ \sum_{i=0}^{t} a_i X^i \longrightarrow (a_0\ a_1 \dots a_t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{C}[X]_{\leq t} \longrightarrow \mathbb{C}^{t+1} \\ \sum_{i=0}^{t} a_i X^i = f(X) \longrightarrow (f(\omega^0)\ f(\omega^1) \dots f(\omega^t)) \end{cases}$$

con ω $t+1$-esima $\omega = e^{\frac{2i\pi}{t+1}}$

Siano $\mathcal{U}(\mathbb{K})$, $V(\mathbb{K})$ due spaz. vettoriali su $\mathbb{K}$

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{U};V) := \{f : \mathcal{U} \to V : f \text{ lineare}\}.$$

hom = omomorfismi.

$\mathrm{Hom}(\mathcal{U};V)$ è uno spazio vettoriale. $V^{\mathcal{U}}$ è sp. vett.

Verificare che la comb. lineare di funzioni lineari è lineare.

Siano $m,n \geq 1$; $\mathbb{K}^{m,n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$.

è uno s. vettoriale con somma di matrici e prod. scal componente per componente.

$\mathbb{K}^{m,n} \cong \mathbb{K}^{m \cdot n}$

$\uparrow$ isomorfo

$$\begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \to (a_{11} \dots a_{1n} \dots a_{m1} \dots a_{mn})$$

$\mathbb{K}^{m,n} \cong Hom(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ <u>lo vedremo</u>

$$\begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \pm$$

$$\neq (a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3) \pm$$
$$\pm (a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3)$$

$\mathbb{K}^{2,3} \neq \mathbb{K}^{3,2} \neq \mathbb{K}^6$

$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n \text{ volte}}$

$\mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$

$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, -1\}$

$\mathbb{Z}_3^2 = \{(0\,0), (0\,1), (0,-1), (1,0), (1\,1), (1,-1) (-1\,0), (-1,1) (-1,-1)\}$.

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{ a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}.$$

$$S \subseteq \mathbb{R}_{[x]_{\leq 2}} = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : \; f(1) = 0 \}.$$

$f(x), g(x) \in S$

$\alpha f(x) + \beta g(x) \in S \iff$

$\iff \alpha f(1) + \beta g(1) = 0 \iff$

$\alpha \cdot 0 + \beta 0 = 0$ ✓

$S \leq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} \cong \mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

$f(1)=0$ come si traduce in $\mathbb{R}^3$?

$f(1)=0 \qquad f(x) = (x-1)(\alpha x+\beta)$

$= \alpha x^2 - \alpha x + \beta x - \beta =$

$= \alpha x^2 + (\beta - \alpha)x - \beta$

$= \{ \ldots \quad \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$S = \{ a x^2 + b x + c \mid a = 2,\ c = -\beta,\ b = \beta - \alpha \}$

$= \{ 2 x^2 + (\beta - 2)x - \beta \mid \beta \in \mathbb{R} \}$ ...

$$f \mapsto \{(a, b-a, -b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(a, -c-a, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}.$$

Def: Siano $V(\mathbb{K})$, $W(\mathbb{K})$ due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $f: V \to W$ lineare.

$$\ker(f) := \{\bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \underline{0}\} = f^{-1}(\underline{0}).$$

Ker di f o <u>nucleo</u> di f

Teorema: 1) $\ker(f) \leq V$ è sottospazio di V

2) f è iniettiva $\iff \ker f = \{0_V\}$.
(ker f è banale).

3) $\forall \bar{w} \in \mathrm{Im}(f)$ $\quad f^{-1}(\bar{w}) = \bar{x} + \ker(f)$
ove $\bar{x}$ è un qualunque vettore
di $f^{-1}(\bar{w})$. ↓

「Se $f(\bar{x}) = f(\bar{y}) = \bar{w} \Rightarrow \exists\, \bar{z} \in \ker f$
tale che $\bar{x} = \bar{y} + \bar{z}$ cioè $\bar{x} - \bar{y} \in \ker f$
$\bar{x} \in \bar{y} + \ker(f) := \{\bar{y} + \bar{t} \mid \bar{t} \in \ker f\}$.」

Dim 1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in \ker f$:

$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \ker f$. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \ker f \Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{y}) = \bar{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) = \bar{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\alpha\bar{x}) + f(\beta\bar{y}) = \bar{0}$

$\Rightarrow f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \bar{0}$

$\Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \ker(f)$.

2+3) $f(\bar{x}) = f(\bar{y}) = \bar{\omega} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = \bar{\omega} - \bar{\omega} = \bar{0}$

$\Rightarrow f(\bar{x} - \bar{y}) = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} - \bar{y} \in \ker f$.

Se $\ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow f$ deve essere iniettiva.

Se $\ker f \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow \underline{0}$ ha almeno 2 preimmagini $\Rightarrow f$ non è iniettiva.

$f^{-1}(\bar{w}) \subseteq \bar{x} + \ker f$ se $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ hanno la stessa immagine $\Rightarrow \bar{y} - \bar{x} \in \ker f$ $\Rightarrow \bar{y} \in \bar{x} + \ker f$

Sia $\bar{x} \in V$ e $\bar{z} \in \ker f \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{x}+\bar{z}) = f(\bar{x}) + f(\bar{z}) = f(\bar{x}) + \underline{0} = \bar{w} + \underline{0} = \bar{w}$

$\Rightarrow \bar{x} + \ker f \subseteq f^{-1}(\bar{w})$

se $\bar{y} = \bar{x} + \bar{z} \in x + \ker f$

$\Rightarrow f(\bar{y}) = f(\bar{x}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{y} \in f^{-1}(\bar{w})$

□

Esempio

$$S := \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] : f(1) = 0 \}.$$

$$\varphi : \begin{cases} S \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) \longrightarrow f(1) \end{cases}$$

φ funzione.

φ è lineare

$$(f+g)(x) \xrightarrow{\varphi} (f+g)(1) = f(1) + g(1) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$(\alpha f)(x) \longmapsto (\alpha f)(1) = \alpha \cdot f(1)$$

$$\ker \varphi = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] : f(1) = 0 \}.$$

$a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{R} \quad |\{a_1, a_2 \dots a_k\}| = k$

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^k \\ f(x) \longrightarrow (f(a_1)\ f(a_2) \dots f(a_k)) \end{cases}$$

$$\ker \varphi = \{ f(x) : \varphi(f) = 0 \} =$$

$$= \{ f(x) : f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_k) = 0 \} =$$

$$= \{ (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k)\, g(x) \mid g(x) \in \mathbb{R}[x] \}.$$

$f: V \to W$ lineare e $\bar{w} \in W$

a noi interessa risolvere

$$f(\bar{x}) = \bar{w}$$

2 CASI:

1) $\bar{w} \notin Im(f) \Rightarrow \nexists \bar{x} \in V$ che risolve.

2) $\bar{w} \in Im(f) \Rightarrow \exists \bar{x} \in V$ che risolve
ed ogni soluzione è del tipo $\bar{x} + \bar{z}$
con $\bar{z} \in \ker f$

2.a) $\ker f = \{\bar{0}\} \Rightarrow \exists!$ soluzione

2.b) $\ker f \neq \{\bar{0}\} \Rightarrow \exists$ infinite soluzioni

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax \end{cases}$$

$$f(x) = b \iff ax = b$$

$$\ker f = \begin{cases} a \neq 0 \Rightarrow \ker f = \{0\}. \\ a = 0 \Rightarrow \ker f = \mathbb{R} \end{cases}$$

$ax = b$ $\quad a \neq 0 \Rightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ isomorfismo

$\Rightarrow \exists b \in \mathbb{R}\ \exists! x \in \mathbb{R}:$

$f(x) = b$

$x = a^{-1}b$

$a = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \{0\} \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}: f(x) = b$

$b = 0 \Rightarrow \forall x \in \ker f = \mathbb{R}: f(x) = 0$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$$

$$f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longrightarrow (2x+3y,\ 4x+6y) \end{cases}$$

$f((x,y)) = (4,8)$

$(4,8) \in \text{Im } f$? $f(2,0) = (4,8)$

$\exists$ soluzione. è unica. $\ker f = \{(x,y) : f(x,y) = (0,0)\}$

$= \{(-3a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Tutte e sole le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x+6y=8 \end{cases}$$

corrispondono alle preimmagini di

$$(4,8)$$

secondo $f(x,y) := (2x+3y, 4x+6y)$

e queste sono del tipo

$$(2,0) + \mathrm{Ker}(f) =$$

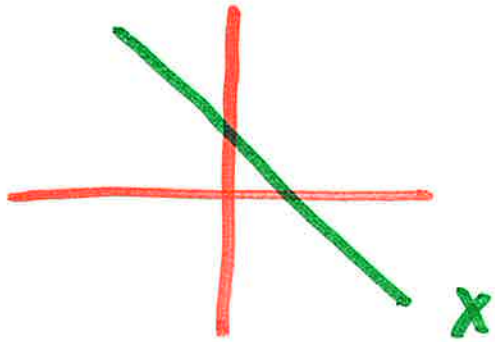
$$= \{(2,0) + (-3a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Riconoscere i sott. vettoriali

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

1) $X \subseteq \mathbb{R}^2$: $X = \{(a,b) \in \mathbb{R} : a+b=1\}$.

è sott.? **No!** $\underline{0} \notin X$

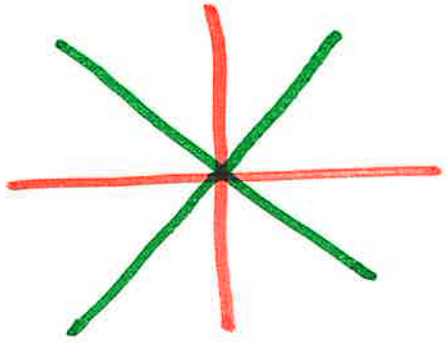


2) $X \subseteq \mathbb{R}^2$: $X = \{(a,b) \mid |a|=|b|\}$.

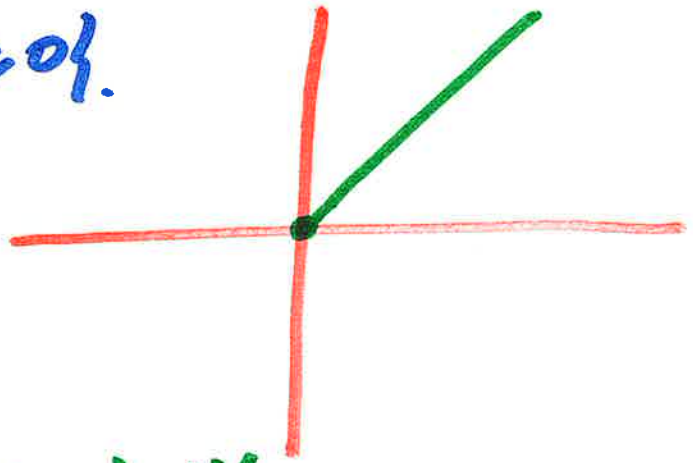
$\underline{0} \in X$ $\quad \bar{v} \in X \Rightarrow 2 \cdot \bar{v} \in X$

Però $(1,1) \in X$

$(1,-1) \in X$ ma $(1,1)+(1,-1) \notin X$



3) $X \subseteq \mathbb{R}^2$: $X = \{(a,b) : a = b \ a \geq 0\}$.



No $0 \in X$

$\forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \bar{u} + \bar{v} \in X$

ma $(1,0) \in X$, $-1 \cdot (1,0) = (-1,0) \notin X$.

In $\mathbb{R}^2$ un sottospazio vettoriale può essere $\mathbb{R}^2$, $\{0\}$ oppure è "una retta per l'origine" ovvero

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\} = \ker(f(x,y)=ax+by)$

oss: se si hanno sistemi di eq. lineari omogenee (cioè $\text{rette} = 0$) $\Rightarrow$ si ha un sott. vettoriale.

$$S = \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a^2+b^2 = 0 \} =$$

$$= \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = b = 0 \} = \{ (0\ 0\ c) \mid c \in \mathbb{R} \}.$$

$S' = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid f(2) = 0 \}$. è sottospazio

$S'' := \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid f(\sqrt{2}) = 0 \} \subseteq \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$

$= \{ f(x) \in \mathbb{Q}[x]_{\leq 3} \mid f(\sqrt{2}) = 0 \quad f(-\sqrt{2}) = 0 \}$.

$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = (x^2-2)$