Relazioni su di un insieme A

Di <u>equivalenza</u> se $R \subseteq A \times A$

e R simmetrica $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

R riflessiva $(a,a) \in R \ \forall a \in A$

R transitiva $(a,b) \in R \ \& (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R.$

$\forall a \in A$

$[a]_R := \{ b \in A : (a,b) \in R \}.$ $\Rightarrow \forall a \in A : a \in [a]_R$

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$$

$\forall a,b \in R$: [illegible] $[a]_R = [b]_R$ oppure $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

Se $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset \Rightarrow [a]_R = [b]_R.$

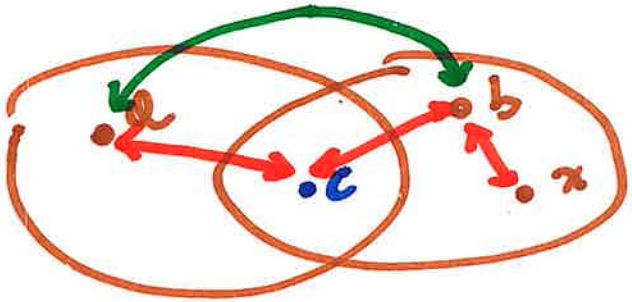
$\Downarrow$

$\exists c \in [a]_R \cap [b]_R.$ Mostriamo che $\forall x \in [b]_R$ si ha $x \in [a]_R$

$\Rightarrow [b]_R \subseteq [a]_R$

ANALOGAMENTE SI MOSTRA

$[a]_R \subseteq [b]_R$.



$(a,c) \in R$ perché $c \in [a]_R$

$(c,b) \in R$ perché $c \in [b]_R \Rightarrow b \in [c]_R$

$\Rightarrow (a,b) \in R$ per la transitività.

$x \in [b]_R \Rightarrow (b,x) \in R$ ma

$(a,b) \in R$

$\Rightarrow (a,x) \in R \Rightarrow x \in [a]_R$.

$\Rightarrow [b]_R \subseteq [a]_R$

□

A/R = insieme quoziente di A sulla relazione R

$A \setminus R = \{a \in A \mid a \notin R\}$.

$A/(A \times A) = \{A\}$.

"$\leq$" relazione d'ordine:
- riflessiva
- transitiva
- antisimmetrica

$(a,b) \in R \;\&\; (b,a) \in R \Rightarrow a = b$.

Su $\mathbb{R}$ $\quad a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{R} : (b-a) = c^2$

A, B : insiemi.

Una relazione R da A a B è

$$R \subseteq A \times B$$

$R \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$

A: dominio

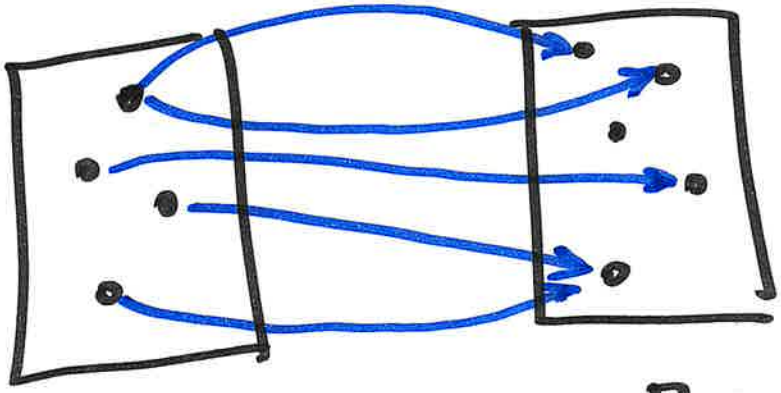
B: codominio

$$R^{opp} := \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in A \times B\}.$$

opp = opposta

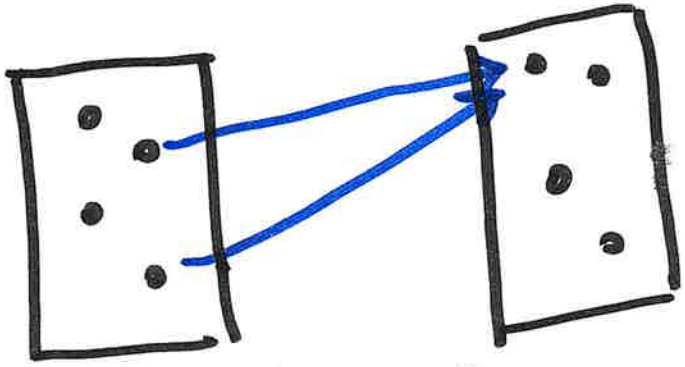
- R è ovunque definita $\iff \forall a \in A \ \exists b \in B : (a,b) \in R$
- R è funzionale $\iff \forall a \in A \ \exists_{\leq 1} b \in B : (a,b) \in R$

$\exists_{\leq 1}$ → esiste al più 1 elemento di B



A B

ovunque definita.



Funzionale.

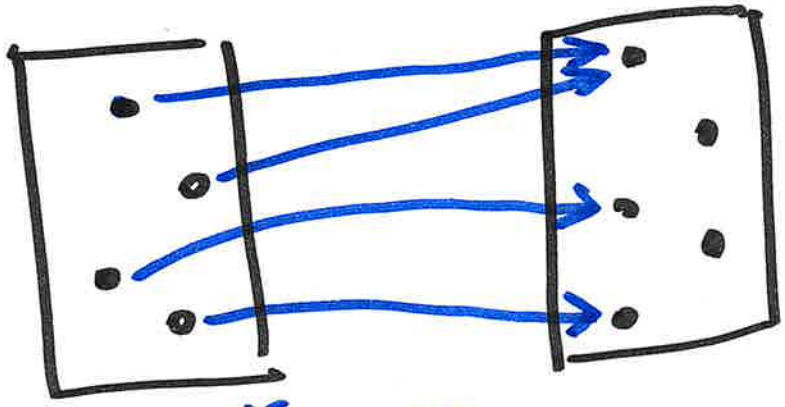
$(a,b) \in R$

$R \subseteq A \times B$ funzione

$\Leftrightarrow$ funzionale ed ovunque definita

$\Leftrightarrow \forall a \in A \; \exists! b \in B : (a,b) \in R$

$\exists!$ → esiste un unico.



Funzione.

$R \subseteq A \times B$ funzione

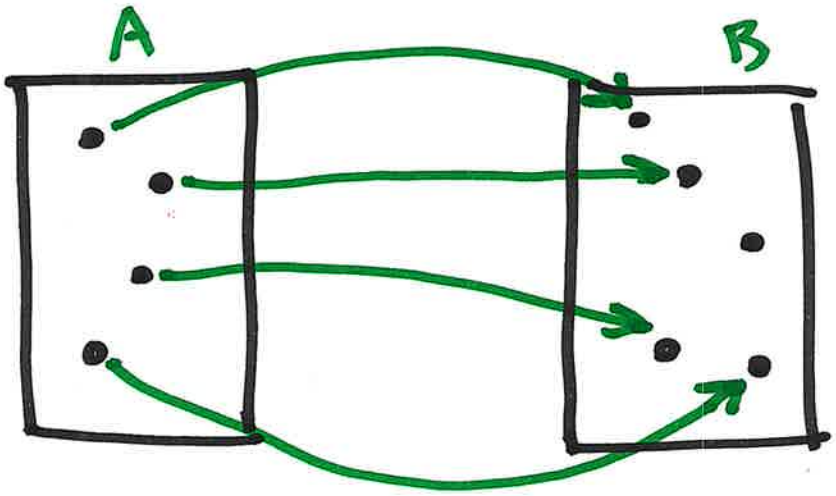
invece che $(a,b) \in R$ scriverò $b = R(a)$

$f: A \to B$ funzione di dominio A e codominio B.

- f iniettiva: $\forall b \in B \; \exists_{\leq 1} a \in A : b = f(a)$
  f^{opp} è funzionale
- f suriettiva: $\forall b \in B : \exists a \in A : b = f(a)$
  f^{opp} è ovunque definita.
- f biiettiva: iniettiva + suriettiva
  $\forall b \in B \; \exists! a \in A : b = f(a)$
  f^{opp} è una funzione.

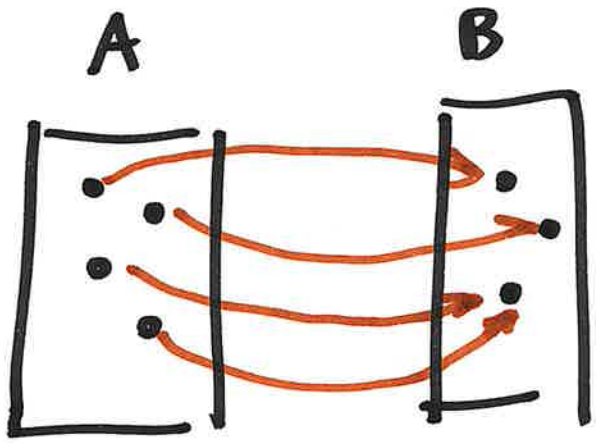
Se $f : A \to B$ biettiva, si dice funzione inversa di f

$f^{-1} : B \to A$ con $f^{-1} = f^{opp}$



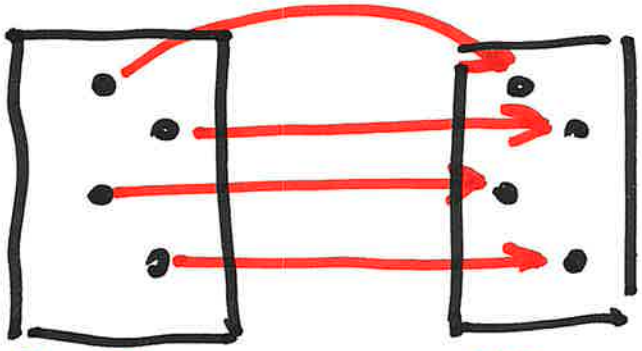
f iniettiva

f^{opp} è funzionale



f suriettiva

f^{opp} è ovunque definita.



f biettiva $\Rightarrow$ f^{-} è biettiva "1-1"

Def: Si dice che due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità (= numero di elementi)
$\Leftrightarrow \exists\, f: A \to B$ biiettiva.

N.B. Se A è finito $\Rightarrow \forall\, X \subseteq A$ con $X \neq A$
$\exists\, f: A \to X$ suriettiva ma non biiettiva.

Se A è infinito $\Rightarrow \exists\, X \subseteq A$ con $X \neq A$
e $f: A \to X$ biiettiva.

Def A è infinito se $\exists\, X \subsetneq A$ con e $f: A \to X$ biiettiva.

$$f: \begin{cases} \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$$ è biiettiva ma $2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z} := \{2a \mid a \in \mathbb{Z}\}$. $\quad 1 \notin 2\mathbb{Z}$

$\forall y \in 2\mathbb{Z}\ \exists a \in \mathbb{Z}: y = 2a$ e dunque $y = f(a)$

Supponiamo $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow f$ iniettiva.

$\subsetneq$ contenuto ma non uguale

$\subseteq$ contenuto / sottoinsieme

$\subset$ contenuto

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità

$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ non hanno la stessa cardinalità

$f: A \to B$ funzione biiettiva

$f^{-1}: B \to A$ funzione inversa.

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$ due funzioni

Si dice funzione composta $(g \circ f) \subseteq A \times C$

la funzione definita come

$$(g \circ f) := \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a,b) \in f \text{ e } (b,c) \in g\}.$$

(a,c) : $\exists\, b \in B$ con $b = f(a)$ e $c = g(b)$

(a,c) : $c = g(f(a))$

ATTENZIONE: il codominio di f è il dominio di g.

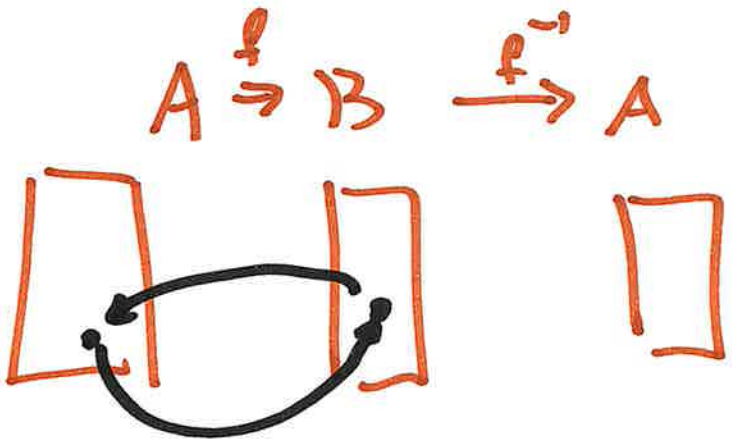
Sia $i_A : A \to A$ la funzione identica

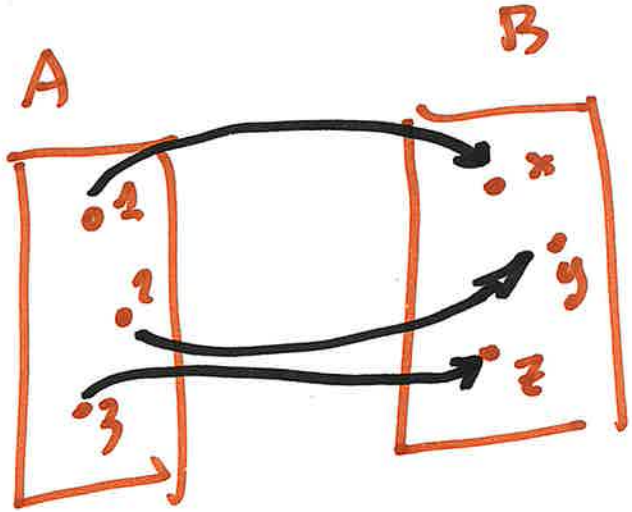
$i_A := \{(a,a) \mid a \in A\}$.

e sia $f : A \to B$ biiettiva

$\Rightarrow (f^{-1} \circ f) : A \to A$ e $(f^{-1} \circ f) = i_A$

$(f \circ f^{-1}) : B \to B$ e $(f \circ f^{-1}) = i_B$





$$i_A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

$$i_B = \{(x,x),(y,y),(z,z)\}.$$

$(g \circ f)$ è una operazione che date 2 funzioni opportune fornisce una nuova funzione.

Sia $B^A := \{ f : A \to B \mid f \text{ funzione} \}$.

$\alpha : B^A$

Ad ogni elemento di A dobbiamo prendere un elemento di B.

Ad el. di A ci sono $|B|$ possibilità.

Gli elementi di A sono $|A|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ il numero possibile di funzioni da $A \to B$ è $|B|^{|A|}$

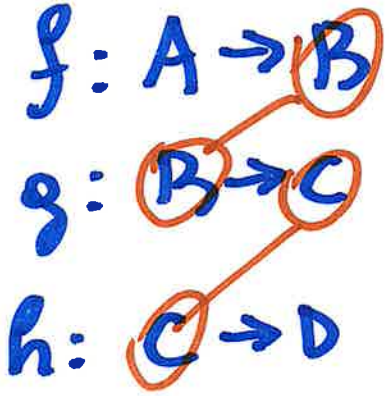
Quante sono le funzioni

$$\{1,2,3\} \to \{0,1\}.$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

$$\circ : B^A \times C^B \to C^A$$

→ proprietà fondamentale della composizione di funzioni.
proprietà associativa.



tre funzioni.

$(g \circ f): A \to C$ $\quad h \circ (g \circ f): A \to D$

$(h \circ g): B \to D$ $\quad (h \circ g) \circ f: A \to D$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$h \circ g \circ f$$

Sia $f: A \to B$ una funzione.

- Sia $X \subseteq A$. Si dice restrizione di A ad X la funzione

$$f|_X := \{(a,b) \in f \mid a \in X\}.$$

$$f|_X : X \to B$$

- Sia $Y \supseteq \mathrm{Im}(f)$ ove $\mathrm{Im}(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\}$.

Si dice troncamento di f ad Y la funzione $f^{|Y} := \{(a,b) \in A \times Y : f(a) = b\}$.

$$f^{|Y} : A \to Y.$$

$f: A \to B$

$X \subseteq A$ $\quad Y \supseteq \operatorname{Im} f|_X$

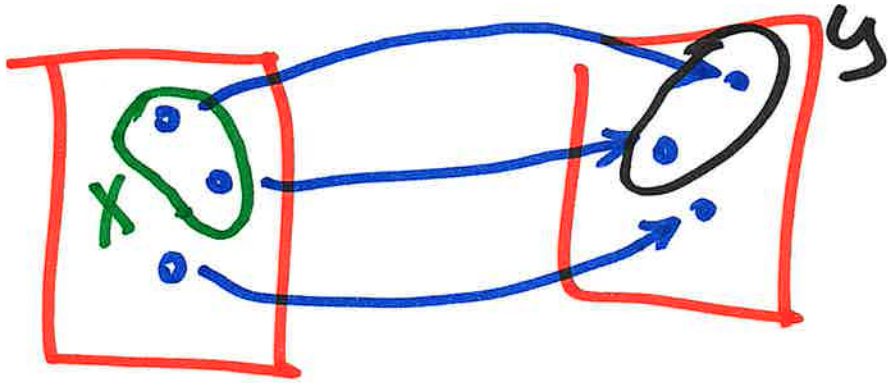
$f|_X^Y$ restrizione e troncata ad Y di f

1) restringere
2) troncare

non viceversa.

$f: A \to B$ biettiva

f ristretta ad X e troncata ad Y.



NON CI SONO POSSIBILI TRONCAMENTI.

$f|_X$ può essere troncata ad Y.

$f|_X^Y : X \to Y$ ed è biettiva. □