Se $\cdot : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare definito positivo $\Rightarrow$

$$\|\cdot\|_2 : V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \bar{x} \mapsto \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$$

è una norma.

$\|\cdot\|$ è una norma $\Leftrightarrow$

1) $\forall \bar{x} \in V: \|\bar{x}\| \geq 0$
2) $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$
3) $\|a\bar{x}\| = |a| \cdot \|\bar{x}\|$
4) $\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

} immediate dalla def. positiva

1) DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY/SCHWARTZ

$$|\bar{x}\cdot\bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

DIM Se $\bar{x} = \underline{0}$ oppure $\bar{y} = \underline{0} \Rightarrow |\bar{x}\cdot\bar{y}| = 0 \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| = 0$

ALTRIMENTI CONSIDERIAMO LA FUNZIONE

$$\|\bar{x}+\alpha y\|^2$$

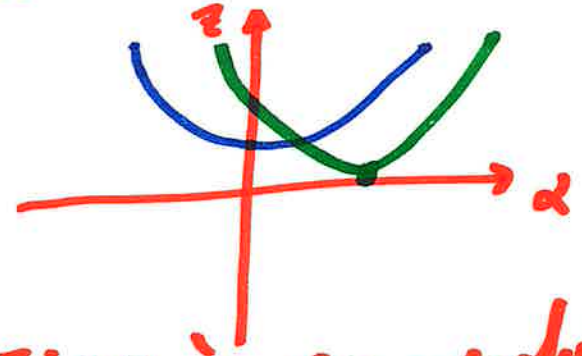
$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \longrightarrow \|\bar{x}+\alpha\bar{y}\|^2 = (\bar{x}+\alpha\bar{y})\cdot(\bar{x}+\alpha\bar{y}) \end{cases}$$

$\forall \alpha$: $(\bar{x}+\alpha\bar{y})\cdot(\bar{x}+\alpha\bar{y}) = \bar{x}\cdot\bar{x} + \alpha\bar{x}\bar{y}\cdot\alpha\bar{y} + 2\alpha\,\bar{x}\cdot\bar{y} =$

$= \|\bar{x}\|^2 + 2\alpha\,\bar{x}\cdot\bar{y} + \alpha^2\|\bar{y}\|^2 \geq 0$

↑ per la definita positività.

$z = \alpha^2\|\bar{y}\|^2 + 2\alpha\,\bar{x}\cdot\bar{y} + \|\bar{x}\|^2 \geq 0 \ \forall\alpha$



il $\frac{\Delta}{4}$ di questa equazione è ≤ 0 perché non può avere 2 radici distinte.

$$\frac{\Delta}{4} = (\bar{x}\cdot\bar{y})^2 - \|\bar{y}\|^2\cdot\|x\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (\bar{x}\cdot\bar{y})^2 \leq \|\bar{x}\|^2\cdot\|\bar{y}\|^2 \quad \text{ed estraendo la } \sqrt{}$$

$$|\bar{x}\cdot\bar{y}| \leq \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|. \qquad \square$$

2) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE.

$$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

DIM: $\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 \leq (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2 \iff$

$$(\bar{x}+\bar{y})\cdot(\bar{x}+\bar{y}) \leq \|\bar{x}\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|\bar{y}\|^2 \iff$$

$$\|\bar{x}\|^2 + 2\,\bar{x}\cdot\bar{y} + \|\bar{y}\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|\bar{y}\|^2 \iff$$

$$2\,\bar{x}\cdot\bar{y} \leq 2\|\bar{x}\|\cdot\|y\|$$

ma $\quad 2(x\cdot y) \leq 2|x\cdot y| \overset{\text{CK}}{\leq} 2\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$ $\qquad \square$

Spazio vettoriale.

Hilbert — prodotto scalare (def pos.) → **Banach** — norma → **Metrico** — distanza.

$\cdot : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$

$\bar{x}\cdot\bar{x} \geq 0 \ \forall \bar{x}$

$\bar{x}\cdot\bar{x} = 0 \iff x = 0$

$\bar{x}\cdot\bar{y} = \bar{y}\cdot\bar{x}$

$(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})\cdot\bar{z} = \alpha(\bar{x}\cdot\bar{z}) + \beta(\bar{y}\cdot\bar{z})$

$\bar{x}\cdot(\alpha\bar{y}+\beta\bar{z}) = \alpha(\bar{x}\cdot\bar{y}) + \beta(\bar{y}\cdot\bar{z})$.

$\|\cdot\| : V_n \to \mathbb{R}$

$\|\bar{x}\| \geq 0 \ \forall \bar{x}$

$\|\bar{x}\| = 0 \iff \bar{x} = \bar{0}$

$\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha|\,\|\bar{x}\|$

$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

$\longrightarrow \|\bar{x}\| := \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$

$d : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$

$d(\bar{x},\bar{y}) \geq 0 \ \forall \bar{x},\bar{y} \in V$

$d(\bar{x},\bar{y}) = 0 \iff \bar{x} = \bar{y}$

$d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y})$

$\forall \bar{x},\bar{y},\bar{z} \in V$.

$d(\bar{x},\bar{y}) = d(\bar{y},\bar{x})$

$\longrightarrow d(\bar{x},\bar{y}) := \|\bar{x}-\bar{y}\|$

$d(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\| = \|\bar{x}-\bar{z}+\bar{z}-\bar{y}\|$

$\leq \|\bar{x}-\bar{z}\| + \|\bar{z}-\bar{y}\| =$

$= \|\bar{x}-\bar{z}\| + \|\bar{y}-\bar{z}\| =$

$= d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y})$.

prodotto scalare

def. ↓ pos.

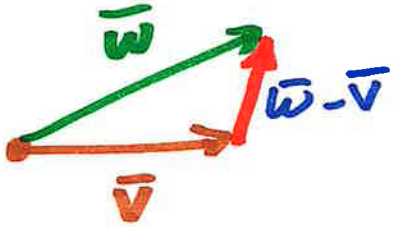
→ ortogonalità

→ "angolo"

↔ proiezione ortogonale

norma

→ lunghezza di un vettore



distanza

→ distanza fra 2 vettori.

In $\mathbb{R}^n$: prod. scalare standard

$$(x_1 \dots x_n)\cdot(y_1 \dots y_n) = [x_1 \dots x_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum x_i y_i$$

$\bar{x}\cdot\bar{x} = \sum x_i^2 \geq 0$ e $0 \Leftrightarrow \forall i : x_i = 0$

$$\|\bar{x}\|_2 := \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$$

$$\|\bar{x}\|_1 := \sum_i |x_i|$$

$$\|\bar{x}\|_\infty := \sup |x_i|$$

$$\|\bar{x}\|_p := \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_p(\bar{x},\bar{y}) := \|\bar{x}-\bar{y}\|_p$$

$$d_H(\bar{x},\bar{y}) := |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$$

↑ distanza di Hamming.

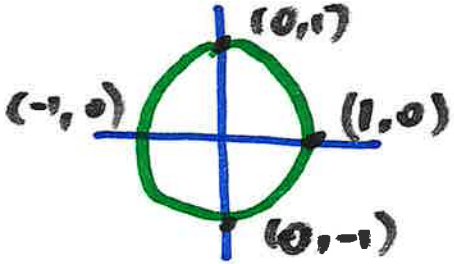
Oss: In sp. vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{R}$ tutte le norme danno luogo alla medesima nozione di "essere vicino" [inducono topologie equivalenti].

Se $\sum x_i^2$ è "piccolo" $\Leftrightarrow$

$|x_i|$ è piccolo $\forall i \Leftrightarrow$

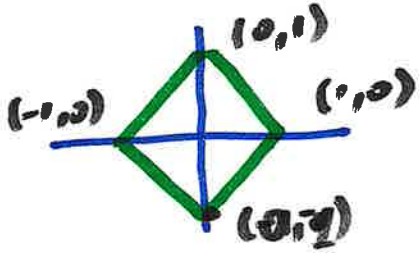
$\sum |x_i|$ è piccolo $\Leftrightarrow$ $\sup |x_i|$ è piccolo

luogo dei vettori di $\|\bar{x}\|=1$ in $\mathbb{R}^2$



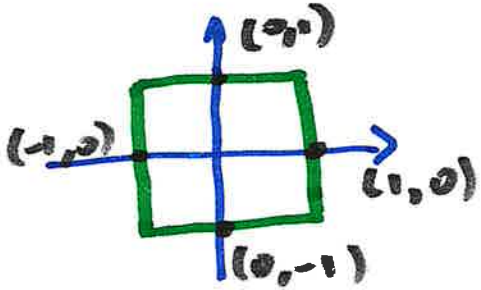
$\|\bar{x}\|_2 = 1$

$x^2+y^2=1$



$\|\bar{x}\|_1 = 1$

$|x|+|y|=1$



$\|\bar{x}\|_\infty = 1$

$\sup(|x|,|y|)=1$

$$= |\{i : x_i \neq y_i\}| + |\{i : y_i \neq z_i\}| = d_H(x,y) + d_H(y,z).$$

$$\leq |\{i : x_i \neq z_i\} \cup \{i : y_i \neq z_i\}|$$

$$\leq |\{i : x_i \neq z_i\}| = d_H(x,z)$$

$$d_H(x,y) = |\{i : x_i \neq y_i\}| = |\{i : x_i \neq z \text{ oder } z \neq y_i\}|$$

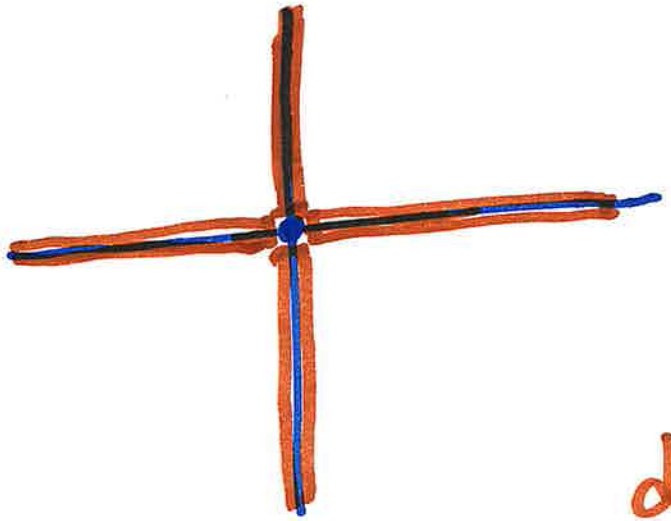
$$\{i : x_i = z = z \neq y_i\}$$

$$\forall A$$

$$\Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall i : x_i = y_i$$

$$x = y.$$

$$d_H(x,y) > 0 \qquad d_H(x,y) = |\{i : x_i \neq y_i\}| \qquad d_H(x,y) = d_H(y,x)$$



$$B_H(0;1) =$$

$$= \{(x,0) \mid x \neq 0\} \cup$$

$$= \{(0,y) \mid y \neq 0\}.$$

distanza di Hamming.

DA C/S. $|\bar{x}\cdot\bar{y}| \le \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$ $\quad \bar{x},\bar{y}\neq 0$

$$-1 < \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|} < 1 \qquad \bar{x}\cdot\bar{y}=0 \iff \bar{x}\perp\bar{y}$$

Teorema: Sia $\bar{u},\bar{v}\in V_n(\mathbb{K})$ con $\bar{u}\cdot\bar{u}\neq 0$

$\Rightarrow$ è sempre possibile scrivere

$$\bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{v}_{\perp}$$

con $\bar{v}_{\parallel}\in \mathcal{L}(\bar{u})$ e $\bar{v}_{\perp}\perp\bar{u}$.

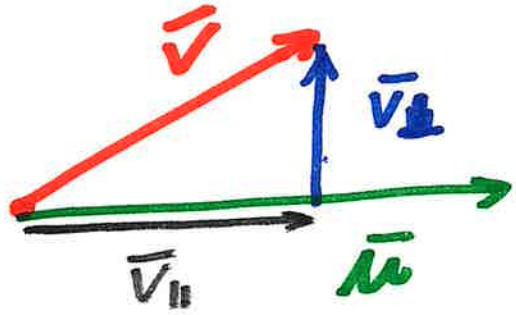
Il vettore $\bar{v}_{\parallel}$ è detto **proiezione ortogonale** di $\bar{v}$ su $\bar{u}$.

DIM: $\quad \bar{v}_{\parallel} := \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\bar{u}\cdot\bar{u}}\bar{u} \Rightarrow \bar{v}_{\perp} = \bar{v}-\bar{v}_{\parallel}$

calcoliamo $\bar{v}_{\perp}\cdot\bar{u} = \bar{v}\cdot\bar{u} - \bar{v}_{\parallel}\cdot\bar{u} = \bar{v}\cdot\bar{u} - \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\bar{u}\cdot\bar{u}}\cdot\bar{u}\cdot\bar{u} = 0$

□

Il valore $\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\bar{u}\cdot\bar{u}}$ è detto <u>coeff. di Fourier</u> di $\bar{v}$ rispetto ad $\bar{u}$.



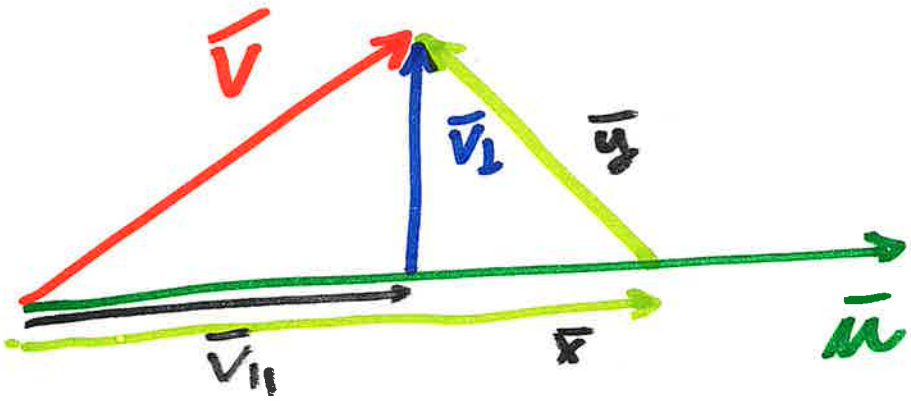
<u>Teorema</u>: Sia $V_n(\mathbb{R})$ euclideo, $\bar{u} \neq \underline{0}$

Supponiamo $\bar{v} = \bar{x} + \bar{y}$ con $\bar{x} \in \mathcal{L}(\bar{u})$.

Allora $\|\bar{y}\|$ è minima quand $\bar{x} = \bar{v}_{\|}$

ed $\bar{y} = \bar{v}_\perp$

$\bar{v}_\perp \perp (\bar{v}_\parallel - \bar{x})$



$$\|\bar{y}\|^2 = (\bar{v}-\bar{x})\cdot(\bar{v}-\bar{x}) = (\bar{v}_\perp + \bar{v}_\parallel - \bar{x})\cdot(\bar{v}_\perp + \bar{v}_\parallel - \bar{x})$$

$$= \bar{v}_\perp \cdot \bar{v}_\perp + 2\,\bar{v}_\perp \cdot (\bar{v}_\parallel - \bar{x}) + (\bar{v}_\parallel - \bar{x})\cdot(\bar{v}_\parallel - \bar{x}) =$$

$$= \|\bar{v}_\perp\|^2 + \|\bar{v}_\parallel - \bar{x}\|^2$$

è minimo se $\|\bar{v}_\parallel - \bar{x}\|^2 = 0 \iff \bar{x} = \bar{v}_\parallel \Rightarrow \bar{y} = \bar{v}_\perp$

□

$\bar{v}_{//}$ è il vettore in $\mathcal{L}(\bar{u})$ più vicino a $\bar{v}$

Definiamo come coseno dell'angolo fra 2 vettori $\bar{u}$ e $\bar{v}$

il numero $\cos \widehat{\bar{u}\bar{v}} := \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|}$

$$-1 \le \cos \widehat{\bar{u}\bar{v}} \le 1$$

$\cos \widehat{\bar{u}\bar{v}} = 0$ se $\bar{u} \perp \bar{v}$

$\cos \widehat{\bar{u}\bar{v}} = 1 \iff \bar{u}\cdot\bar{v} = \|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|$

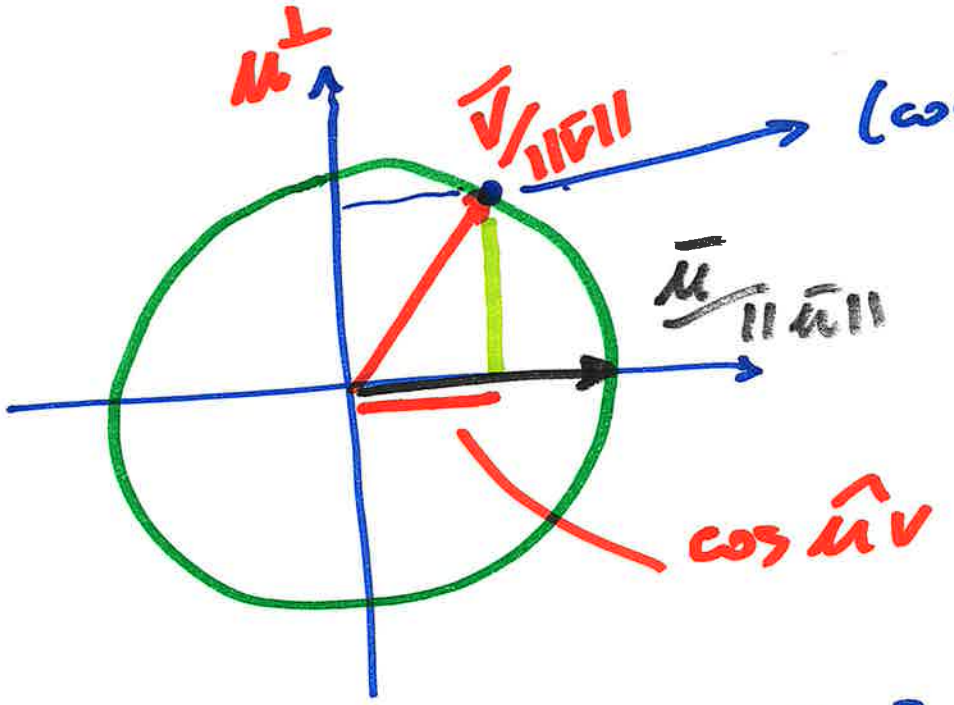
$\iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R};\ \bar{u} = \alpha\bar{v} \quad \alpha \neq 0 \ \alpha > 0$

$\bar{u}\cdot(\bar{v}) = \alpha\bar{v}\cdot\bar{v} = \|\alpha\bar{v}\|\cdot\|\bar{v}\|$

$\alpha\|v\|^2 = \alpha\|v\|^2.$

$\cos \widehat{\bar{u}\bar{v}} = -1 \iff \bar{u} = -\alpha\bar{v} \quad \alpha > 0$

N.B. $\cos \widehat{\alpha\bar{u}\cdot\bar{v}} = \cos \widehat{\bar{u}\bar{v}}$



sappiamo già che $\operatorname{sen}(\hat{uv})^2 + \cos(\hat{uv})^2 = 1$

$$\operatorname{sen}^2(\hat{uv}) = 1 - \cos(\hat{uv})^2$$

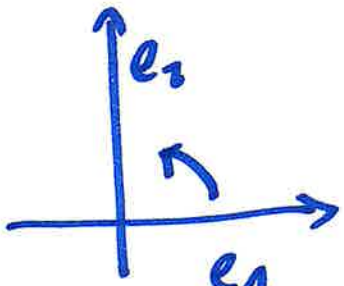
ci serve sapere cosa vuol dire prendere una dir. per $\bar{u}^\perp$

soluzione: usiamo la nozione di determinante.

per scegliere la direzione "giusta" di $u^\perp$

diciamo che una base di $\mathbb{R}^2$
è orientata come la base canonica $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$
se mettendo a matrice le sue componenti
si ha che il det. di tale matrice è >0.

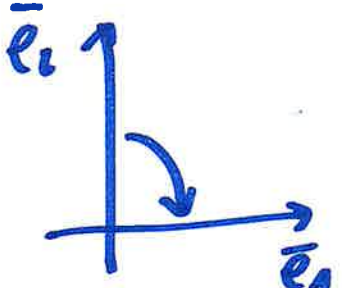
(e_1, e_2)



$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

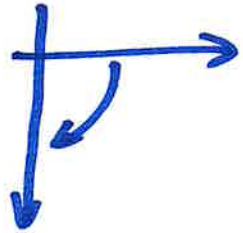
ORIENTAMENTO POSITIVO

$(\bar{e}_2, \bar{e}_1)$



$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

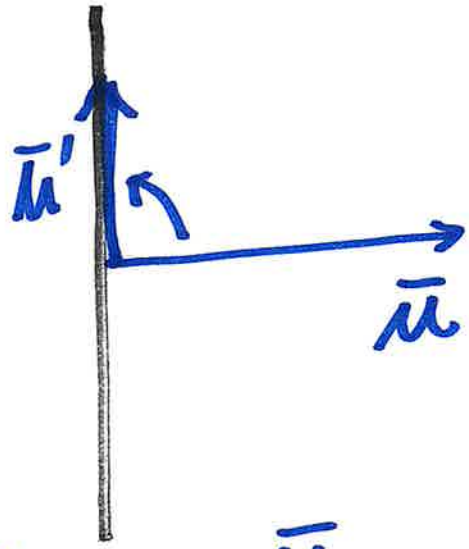
$(e_2, -e_2)$

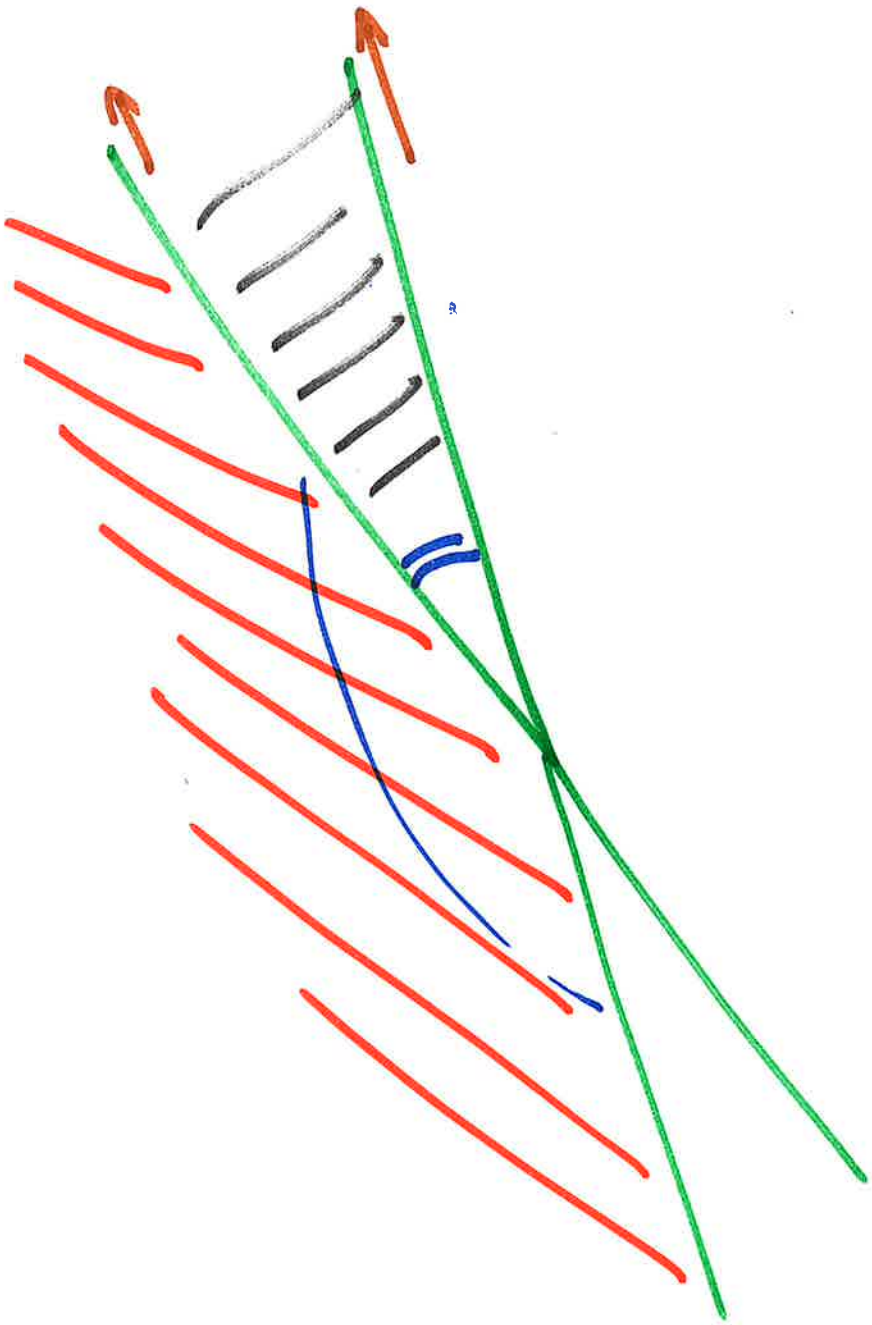


$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ORIENTAMENTO NEGATIVO.

per definire $\sin(\widehat{\bar{u}\bar{v}})$ prendiamo un riferimento positivo $\bar{u}, \bar{u}'$ ove $\bar{u}'$ è ortogonale



calcolo le componenti di $\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$ rispetto questo riferimento fissato.

$$\left(\left(\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}\cdot\frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}\right),\left(\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}\cdot\frac{\bar{v}'}{\|\bar{v}'\|}\right)\right)=(\cos\theta,\sin\theta).$$