Matrice $\mathbb{K}^{n,m} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$.

$\mathbb{K}^{m,n}$ è sp. vettoriale di dim $m \cdot n$ su $\mathbb{K}$

$$\mathcal{B} = \left(\bar{e}_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \bar{e}_{mn} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathbb{K}^{mn} \longmapsto \mathbb{K}^{m,n}$$

$$(a_{11} \dots a_{1n} a_{21} \dots a_{2n} \dots a_{mn}) \to \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$X = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{K}^{1,n}$ vettore riga

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n,1}$ vettore colonna

$$xy \in \mathbb{K}^{1,1} \cong \mathbb{K}$$

$$(x_{11} \dots x_{1n}) \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix} = x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} \dots + x_{1n}y_{n1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_{i1}$$

$$\in \mathbb{K}^{m,t}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} \underset{\in \mathbb{K}^{t,n}}{[C_1 \dots C_n]} = \quad \text{con} \quad R_i \in \mathbb{K}^{1,t}, \; C_i \in \mathbb{K}^{t,1}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \dots & R_1C_n \\ \vdots & & \vdots \\ R_mC_1 & R_mC_2 \dots & R_mC_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m,n}$$

1) possiamo usare le matrici per descrivere il cambiamento di base in $V_n(\mathbb{K})$.

$$X = AX'$$

ove X = coord. rispetto la base $\mathcal{B}$

X' = coord. rispetto la base $\mathcal{B}'$.

A = matrice che ha come colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$

2) Se $f: V_n(\mathbb{K}) \to V_m(\mathbb{K})$ è lineare

e $\mathcal{B}$ = base di $V_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{B}'$ = base di $V_m(\mathbb{K})$ $\Rightarrow$

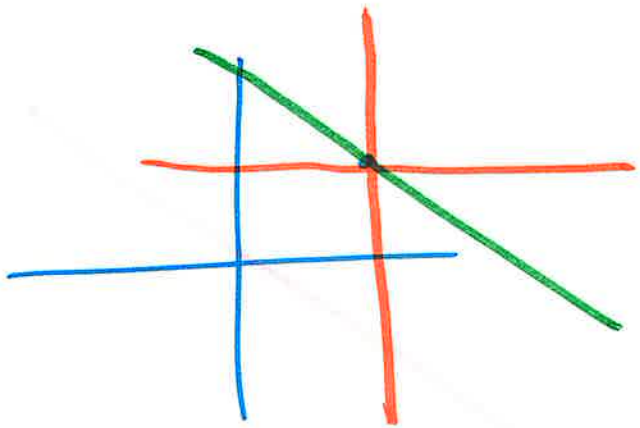
$\Rightarrow \exists\, A_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathbb{K}^{m,n}$ tale che $Y = A_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}'} X$

ove Y = comp. di $f(\bar{v})$ rispetto $\mathcal{B}'$.

X = componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

$A_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ = matrice associata ad f

ove le COLONNE DI A contengono le componenti dei vettori $f(\bar{e}_i)$ rispetto la base $\mathcal{B}'$ ove $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$.



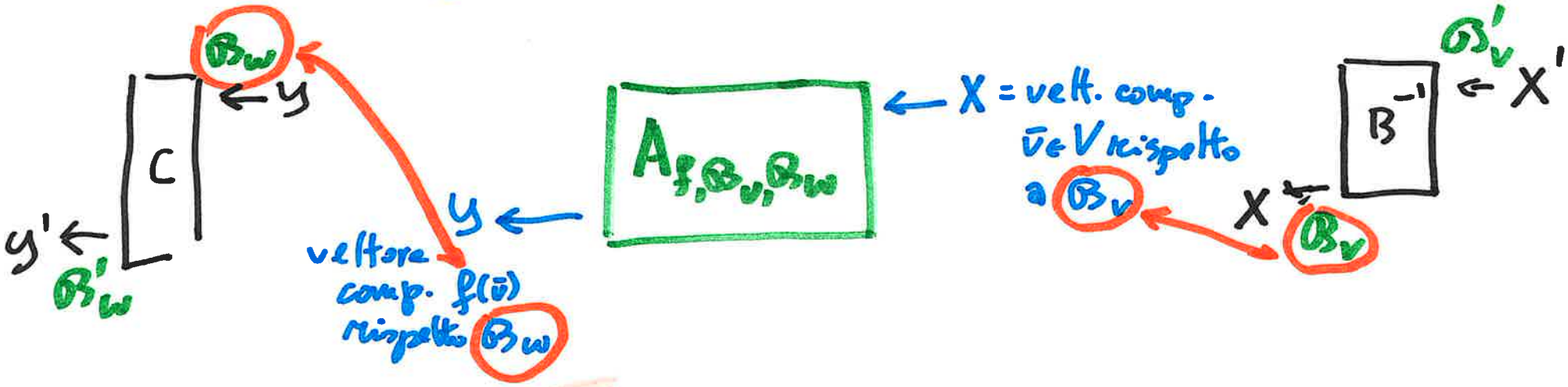
COME CAMBIA LA MATRICE DI $f: V_n \to W_m$ al CAMBIARE DELLE BASI

$$V_n \xrightarrow{f} W_m$$

$\mathcal{B}_V = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ $\quad$ $\mathcal{B}_W = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_m)$ → y coord. risp. $\mathcal{B}_W$

$\mathcal{B}'_V = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$ $\quad$ $\mathcal{B}'_W = (\bar{g}'_1 \dots \bar{g}'_m)$ → y' coord. rispetto $\mathcal{B}'_W$.

$X' = BX$ $\quad$ $y' = Cy$



$$A_{f,\mathcal{B}'_V,\mathcal{B}'_W} = C A_{f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} B^{-1}$$

Def: Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ matrici.

Si dice che A e B sono <u>simili</u> se $\exists P \in GL(n, \mathbb{K})$

cioè $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ e P invertibile tale che

$$P^{-1}AP = B$$

ovvero $AP = PB$.

<u>Oss</u>: La relazione di similitudine è di equivalenza.

1) $P = I \Rightarrow I^{-1} = I$ e $I^{-1}AI = A \Rightarrow A \sim A$

2) $P^{-1}AP = B \Rightarrow A = PBP^{-1}$ e posto $Q = P^{-1}$

$A = Q^{-1}BQ$ e dunque $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

3) $A = P^{-1}BP$ e $B = Q^{-1}CQ \Rightarrow A = P^{-1}(Q^{-1}CQ)P =$

$= (P^{-1}Q^{-1})C(QP)$ ma

$$(P^{-1}Q^{-1})(QP) = P^{-1}(Q^{-1}Q)P = P^{-1}IP =$$

$$= P^{-1}P = I \Rightarrow$$

$$(P^{-1}Q^{-1}) = (QP)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = (QP)^{-1}C(QP) \text{ e dunque}$$

$$A \sim B \;\&\; B \sim C \Rightarrow A \sim C.$$

matrici simili corrispondono a differenti rappr. della medesima applicazione lineare $f: V_n(\mathbb{K}) \to V_n(\mathbb{K})$ al cambiare della base.

$f: V_n \to V_n$ lineare $\quad \mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base
$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ un'altra base.

f rispetto a $\mathcal{B}$ è rappr. da una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

sia ora P la matrice di camb. di base $X' = PX$

P è invertibile in quanto $\exists P'$ tale che $X = P'X'$

e sostituendo $\quad X' = PP'X' \Rightarrow PP' = I$

$X = P'PX \Rightarrow P'P = I$

$\Rightarrow f$ rispetto a $\mathcal{B}'$ avrà matrice

$$A' = P'^{-1} A P'$$

e dunque A' è simile ad A. ∎

Def: Sia $f: V_n(\mathbb{K}) \to W_m(\mathbb{K})$ lineare.

Si dice **rango** di f $= rk(f)$ la dimensione di $Im(f)$.

$$rk(f) := \dim Im(f).$$

Si dice **nullità** di f $= null(f)$ la dimensione di $Ker(f)$

$$null(f) := \dim Ker(f).$$

oss: Sia $\mathcal{B}_V = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V_n(\mathbb{K})$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathcal{L}(f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n))$.

$\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) \quad \bar{v} = a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{v}) = a_1 f(\bar{e}_1) + \dots + a_n f(\bar{e}_n)$

In particolare $\operatorname{rk}(f) = \dim \mathcal{L}(f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n))$

$=$ # vettori linearm. indip. in $(f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n))$.

Teorema (nullità + rango).

Sia $f: V_n(\mathbb{K}) \to W(\mathbb{K})$ lineare

Allora $\boxed{n = \operatorname{rk}(f) + \operatorname{null}(f).}$

Dim: • $\ker(f) = \{\underline{0}\} \Rightarrow$ dimostriamo che se $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ è una seq. libera di vettori di $V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow (f(\bar{v}_1) \dots f(\bar{v}_k))$ è una seq. libera di vettori di W; in particolare f manda basi di $V_n(\mathbb{K})$ in basi di $\mathrm{Im}(f) \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = n$

$\ker f = \{\underline{0}\}$ significa che l'unica preimmagine di $\underline{0}$ è $\underline{0}$ $\Rightarrow$

$$\underline{0} = \beta_1 f(\bar{v}_1) + \dots + \beta_n f(\bar{v}_k) =$$

$$= f(\beta_1 \bar{v}_1 + \dots \beta_k \bar{v}_k) \iff$$

$$\iff \beta_1 \bar{v}_1 + \beta_2 \bar{v}_2 + \dots + \beta_k \bar{v}_k = \underline{0}$$

ma i $\bar{v}_i$ sono liberi

$$\iff \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (f(\bar{v}_1) \dots f(\bar{v}_k))$ libera.

$[\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad (a,b) \to (a\ b\ 0)]$

- $\text{null}(f) = \dim \ker(f) > 0$

  $\| \quad t$

$\Rightarrow \ker(f) \leq V_n(\mathbb{K})$ ammette una base formata da $t > 0$ vettori.

$\mathcal{B}_K = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_t)$

possiamo ora completare $\mathcal{B}_K$ a base di $V_n(\mathbb{K})$ aggiungendo $n-k$ vettori $\mathcal{B}' = (\bar{e}_{t+1} \dots e_n)$

$$\mathcal{B}_V = [\underbrace{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_t}_{\text{base di } \ker f} \ \bar{e}_{t+1} \dots \bar{e}_n]$$

$$\text{Im}(f) = \mathcal{L}(\underbrace{f(\bar{e}_1)}_{\| \ \bar{0}} \dots \underbrace{f(\bar{e}_t)}_{\| \ \bar{0}} f(\bar{e}_{t+1}) \dots f(\bar{e}_n)) = \mathcal{L}(f(\bar{e}_{t+1}) \dots f(\bar{e}_n))$$

$\dim \mathrm{Im}(f) \leq n - t = n - \mathrm{null}(f)$

per avere il teorema ci serve far vedere che

$\dim \mathrm{Im}(f) = n - \mathrm{null}(f)$

cioé che $f(\bar{e}_{t+1}) \dots f(\bar{e}_n)$ è libera.

per assurdo supponiamo $\exists (\beta_{t+1} \dots \beta_n) \neq (00\dots0)$

tali che

$$\beta_{t+1} f(\bar{e}_{t+1}) + \dots \beta_n f(\bar{e}_n) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow f(\beta_{t+1}\bar{e}_{t+1} + \dots \beta_n \bar{e}_n) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \beta_{t+1}\bar{e}_{t+1} + \dots + \beta_n \bar{e}_n \in \ker f = \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_t)$$

$\Rightarrow \exists \gamma_1 \dots \gamma_t$ tali che $\gamma_1\bar{e}_1 + \dots + \gamma_t\bar{e}_t = \beta_{t+1}\bar{e}_{t+1} + \dots + \beta_n\bar{e}_n$

$$\Rightarrow \gamma_1 \bar{e}_1 + \dots + \gamma_t \bar{e}_t \underbrace{- \beta_{t+1} \bar{e}_{t+1} \dots - \beta_n \bar{e}_n}_{\text{almeno un } \beta_i \neq 0} = \underline{0}$$

$\Rightarrow (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_t \bar{e}_{t+1} \dots \bar{e}_n)$ è legata $\forall f$

Ne segue che $f(\bar{e}_{t+1}) \dots f(\bar{e}_n)$ è libera

$$\Rightarrow \operatorname{rk}(f) = n - \operatorname{null}(f) \Rightarrow \boxed{\operatorname{null}(f) + \operatorname{rk}(f) = n}$$

□

<u>OSS</u>: 1) Se $f: V_n \to W_m \Rightarrow \operatorname{rk}(f) \leq \min(m,n)$

2) Uno spazio vettoriale di dim $= m$ non può essere isomorfo ad uno sp. vettoriale di dim $= n$ se $m \neq n$.

[Ancora: se $\dim V = \dim W \Rightarrow V \cong W$]

$m < n \Rightarrow$ ogni applicazione lineare

$f: V_n \to V_m$ avrà $\text{null}(f) > 0$

perché $\text{rk}(f) \leq m$ ma

$\text{rk}(f) = n - \text{null}(f) \leq m < n$

$\Rightarrow \text{null}(f) > 0$

$\Rightarrow f$ ha Ker non banale $\Rightarrow f$ non è iniettiva $\Rightarrow f$ non può essere un isomorfismo □

Teorema Dati $V_m(\mathbb{K})$ e $W_m(\mathbb{K})$ sp. vettoriali su $\mathbb{K}$ abbiamo

$$V_n \cong W_m \iff \dim V_n = \dim W_m$$

se $m, n < \infty$

oss: Sia $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una applicazione lineare.

($\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$ si considerano come sp. vettoriali di vettori <u>COLONNA</u> $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n,1}$ $\mathbb{K}^m = \mathbb{K}^{m,1}$)

ALLORA f si può scrivere come

$$f(X) = AX$$

ove $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ è una matrice opportuna.

(ci ricordiamo che ogni vettore di $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$ corrisponde al vettore delle proprie comp. rispetto le basi canoniche).

Viceversa: data $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, la funzione

$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ descritta da $f(X) = AX$

è lineare.

$$f(\alpha X+\beta X') = \alpha f(X)+\beta f(X')$$

$$\| $$

$$A(\alpha X+\beta X') = \begin{bmatrix} {}^tR_1 \\ \vdots \\ {}^tR_m \end{bmatrix}(\alpha X+\beta X') =$$

Righe di A

$$= \begin{bmatrix} {}^tR_1(\alpha X+\beta X') \\ \vdots \\ {}^tR_m(\alpha X+\beta X') \end{bmatrix} =$$

$$\text{fila}\,(a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}) \cdot \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1' \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta x_n' \end{bmatrix} =$$

f_{R_i} ↗

→ $(\alpha X + \beta X')$

$$= a_{i1}(\alpha x_1 + \beta x_1') + a_{in}(\alpha x_2 + \beta x_2') + \dots$$

$$+ a_{in}(\alpha x_n + \beta x_n') =$$

$$= (\alpha a_{i1} x_1 + \alpha a_{i2} x_2 + \dots + \alpha a_{in} x_n) +$$

$$+ \beta (a_{i1} x_1' + \dots + a_{in} x_n') =$$

$$\alpha\, {}^{f}R_i X + \beta\, {}^{f}R_i X'$$

$$A(\alpha X+\beta X') = \begin{bmatrix} {}^tR_1 \\ \vdots \\ {}^tR_m \end{bmatrix}(\alpha X+\beta X') =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha {}^tR_1 X + \beta {}^tR_1 X' \\ \vdots \\ \alpha {}^tR_m X + \beta {}^tR_m X' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha {}^tR_1 X \\ \vdots \\ \alpha {}^tR_m X \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \beta {}^tR_1 X' \\ \vdots \\ \beta {}^tR_m X' \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} {}^tR_1 \\ \vdots \\ {}^tR_m \end{bmatrix} X + \beta \begin{bmatrix} {}^tR_1 \\ \vdots \\ {}^tR_m \end{bmatrix} X' =$$

$$= \alpha AX + \beta AX' = \alpha f(X) + \beta f(X') \qquad \square$$

$f(X) = AX$ è lineare!

Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Si dice <u>rango</u> di A

$rk(A) := \dim \mathrm{Im}(f_A) = rk(f_A)$ ove

$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è la funzione $f(X) = AX$.

poniamo anche $\mathrm{Ker}(A) := \mathrm{Ker}\, f_A = \{X \mid AX = 0\}$.

<u>oss</u>: $rk(A) = \dim \mathcal{L}(C_A)$

rango(A) = dimensione dello sp. vettoriale generato dalle colonne di A

Dim fissata la base canonica di $\mathbb{K}^n$ si vede che

$$A\bar{e}_1 = c_1 \quad \text{ove } c_1 \dots c_n \text{ sono le}$$
$$\vdots \quad \text{colonne di } A$$
$$A\bar{e}_n = c_n$$

$\Rightarrow$ le colonne di A generano $Im(f_A)$

$\Rightarrow$ $rk(A) = \dim Im(f_A) = \dim \mathcal{L}(C_A)$. □

$$Im(f_A) = \mathcal{L}(C_A)$$

Spoiler: $rk(A) = rk(\bar{A}) = \dim \mathcal{L}(R_A)$

ove R_A = insieme delle righe di A.

proprietà delle dimensioni.

1) Siano $\dim V, \dim W < \infty \Rightarrow$

$$V \cong W \iff \dim V = \dim W.$$

2) Se $\dim V = n \iff V \cong \mathbb{K}^n$ $\qquad V = V(\mathbb{K})$

3) Sia $\dim V = n \Rightarrow \forall\, 0 \le i \le n \ \exists\, W \le V$ con

$$\dim W = i$$

Dim: Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di V e

prendiamo $W = \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$ se $i > 0$

oppure $W = \{\bar{0}\}$ se $i = 0$.

4) Se $W \le V \Rightarrow \dim W \le \dim V = n$

(perché $\dim W$ = card. di una base di W e

se W avesse una base con più di n vettori

$\exists$ in V più di n vettori in una seq. libera).

5) Se $W \leq V$ e $\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$.

Se $\dim W = n = \dim V \Rightarrow$ una base $\mathcal{B}$ di W è una seq. libera di n vettori di $V \Rightarrow$ per conseguenza di Steinitz è anche una seq. di generatori per $V \Rightarrow \mathcal{L}(W) = \mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$.

In generale siano ora $\mathcal{U}, W \leq V$.

Cosa è $\mathcal{U} \cap W$? $\mathcal{U} \cap W \leq V$

infatti $\forall\ \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{U} \cap W$ abbiamo

$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \in \mathcal{U}$ perché $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{U} \leq V$

$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \in W$ perché $\bar{a}, \bar{b} \in W \leq V$

$\Rightarrow \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \in \mathcal{U} \cap W \leq \mathcal{U}, W$

Intersecare sottospazi dà sottospazi

$$\dim(U \cap W) \leq \min(\dim U, \dim W).$$

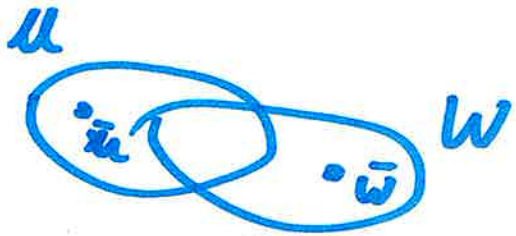
In generale $U \cup W \not\leq V$.

proposizione $U \cup W \leq V$ se e solo se

$U \cup W = U$ oppure $U \cup W = W$

$(W \leq U)$ $(U \leq W)$.

Dim:



Supponiamo

$\exists \bar{u} \in U \setminus W$

$\bar{w} \in W \setminus U$.

Se $U \cup W \leq V$

$\Rightarrow \bar{u} + \bar{w} \in U \cup W$ ma

$\bar{u} + \bar{w} \in U \cup W$ vuol dire

$\bar{u} + \bar{w} \in U$ oppure $\bar{u} + \bar{w} \in W$

ma se fosse $\bar{u}+\bar{w} \in U \Rightarrow$

$\Rightarrow (\bar{u}+\bar{w})-\bar{u} \in U \Rightarrow \bar{w} \in U$ ↯

e se fosse $\bar{u}+\bar{w} \in W \Rightarrow$

$\Rightarrow (\bar{u}+\bar{w})-\bar{w} \in W \Rightarrow \bar{u} \in W$ ↯

$\Rightarrow \bar{u}+\bar{w}$ non può appartenere a $U \cup W$

$\Rightarrow U \cup W$ non è sottospazio □

Def: Siano $U, W \leq V(\mathbb{K})$ sottospazi.

Si dice <u>somma</u> di U e W l'insieme

$$U+W = \{\bar{u}+\bar{w} \mid \bar{u} \in U \text{ e } \bar{w} \in W\}.$$

Teorema:

$$U + W = L(U \cup W).$$

La somma di U e W è il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ che contiene sia U che W.