$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (a,b) \to (a',b')\end{cases}$$

$$e_{11}(a,b) = (a,0)$$
$$e_{22}(a,b) = (0,b)$$
$$e_{21}(a,b) = (0,a)$$
$$e_{12}(a,b) = (b,0)$$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare

$$g(\alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2) =$$

$$= \alpha g(\bar{e}_1) + \beta g(\bar{e}_2)$$

$\bar{e}_1 = (1\ 0)$
$\bar{e}_2 = (0\ 1)$

$$g(\bar{e}_1) = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2$$
$$g(\bar{e}_2) = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2$$

$$g(\alpha\bar{e}_1+\beta\bar{e}_2)=(a_{11}\cdot\alpha+a_{12}\beta)\bar{e}_1+$$
$$+(a_{21}\alpha+a_{22}\beta)\bar{e}_2$$

4 parametri $a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22}$

oss: $g(\alpha\bar{e}_1+\beta\bar{e}_2)\equiv 0 \iff a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$

in particolare

$$g = a_{11} f_1 + a_{12} f_2 + a_{21} f_3 + a_{22} f_4$$

ove $\begin{cases} f_1(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 \\ f_1(\bar{e}_2) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f_2(\bar{e}_1) = 0 \\ f_2(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 \end{cases}$

$\begin{cases} f_3(\bar{e}_1) = e_2 \\ f_3(\bar{e}_2) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f_4(\bar{e}_1) = 0 \\ f_4(\bar{e}_2) = e_2 \end{cases}$

$$g(\alpha\bar{e} + \beta e_2) = \alpha a_{11}\bar{e}_1 + \beta a_{12}\bar{e}_1 + \alpha a_{21}\bar{e}_2 + \beta a_{22}\bar{e}_2$$

Siano $m, n > 0$ interi

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ di m righe ed n colonne ad entrate in $\mathbb{K}$ è una tabella rettangolare delle dimensioni indicate.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

l'entrata generica di A in posizione (i,j) = i-esima riga
j-esima colonna

si indica con a_{ij}

oss: $\mathbb{K}^{m,n}$ con somma e prod. per scalare definiti componente per componente è uno s. vettoriale su $\mathbb{K}$ di dim $= m \cdot n$.

$$A = ((a_{ij}))_{i,j=1}^{m,n}$$

$$B = ((b_{ij}))_{i=1}^{m} \; {}_{j=1}^{n}$$

$$(A+B) := ((a_{ij}+b_{ij}))_{i,j}$$

$$\alpha \cdot A := ((\alpha a_{ij}))_{i,j}.$$

$$\mathbb{R}^{2,2} := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

N.B: Solo matrici che appartengono allo stesso s.vettoriale possono sommarsi fra loro.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b & c+1 \\ d & e+1 & f+1 \end{pmatrix}$$

NON SI PUÒ CALCOLARE

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ **No!**

$\mathbb{K}^{m,n} \cong \mathbb{K}^{m \cdot n}$ ove l'isomorfismo si ottiene fissando una base.

$$\mathbb{R}^{3,2} := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

BASE.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \longrightarrow (a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22}\ a_{31}\ a_{32})$$

Sia $A \in \mathbb{K}^{1,n}$ e $B \in \mathbb{K}^{n,1}$

$$A = [a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}] \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{\cdot} \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

definiamo il prodotto riga per colonna

$$AB \in \mathbb{K}^{1,1} = \mathbb{K}$$

come il valore $(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1})$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{i1}$$

A vettore riga

B vettore colonna.

$\rightarrow$ #colonne di A = #righe di B

Siano ora $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{K}^{n,t}$

definiamo la matrice $C = AB \in \mathbb{K}^{m,t}$

come la matrice che ha in posizione (i,j)

riga i
colonna j $=$ prodotto riga i di A $\times$ prodotto colonna j di B.

C

$1 \le i \le m$ $\qquad$ $1 \le j \le t$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1\cdot 1+2\cdot 0+5\cdot 1 & & & 2 \\ & & & 2 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot 1 & & & 0 \end{array}\right.\left.\begin{array}{c} 5 \\ \\ 1 \\ 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ NON SI PUÓ FARE

$V_n(\mathbb{K})$ spazio vettoriale di dim = n sul campo $\mathbb{K}$.

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$

due sue basi. = seq. libere di generatori.

$\bar{v} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n$

$= x_1'\bar{e}_1' + x_2'\bar{e}_2' + \dots + x_n'\bar{e}_n'$

che legame c'è fra $(x_1 \dots x_n) = X$
e $(x'_1 \dots x'_n) = X'$

Def: Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, si dice trasposta di A la matrice ${}^tA$ ottenuta da A scambiando le righe con le colonne. ${}^tA \in \mathbb{K}^{n,m}$.

$$A = (a_{ij}) \Rightarrow {}^tA = (a_{ji}).$$

Es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$X = (x_1\ x_2 \dots x_n) \qquad \bar{E} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix} \mathcal{B} \qquad \bar{E}' = \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{pmatrix} \mathcal{B}'$$

$$X' = (x'_1\ x'_2 \dots x'_n)$$

$$V = \begin{cases} x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n = X\bar{E} \\ x'_1\bar{e}'_1 + x'_2\bar{e}'_2 + \dots + x'_n\bar{e}'_n = X'\bar{E}' \end{cases}$$

$$\boxed{X\bar{E} = X'\bar{E}'}$$

$$\bar{e}'_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n$$

$$\bar{e}'_2 = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{2n}\bar{e}_n$$

$$\vdots$$

$$\bar{e}'_n = a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X\bar{E} = X'\bar{E}'$$

$$\boxed{\bar{E}' = A\bar{E}}$$

$$X\bar{E} = X'A\bar{E}$$

in questa scrittura abbiamo che i vettori $X\bar{E}$ ed $X'A\bar{E}$ coincidono ma X sono le componenti di $\bar{v}$ rispetto $\bar{E}$ ed $X'A$ sono pure le componenti di $\bar{v}$ rispetto $\bar{E}$ $\Rightarrow$ $X = X'A$

ovvero $\boxed{{}^tX = {}^tAX'}$

$V_n(\mathbb{K})$, $W_m(\mathbb{K})$ due sp. vettoriali sul campo $\mathbb{K}$

e $f: V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow W_m(\mathbb{K})$ lineare.

Siano $\mathcal{B}_V = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ e $\mathcal{B}_W = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_m)$ due basi di V e di W.

osserviamo che 1) f dipende solo dai vettori

$$f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n).$$

Infatti $\forall \bar{v} \in V \ \exists a_1 \dots a_n \in \mathbb{K}^n : \bar{v} = a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) = a_1 f(\bar{e}_1) + \dots + a_n f(\bar{e}_n)$$

$$f(\bar{v}) = [\, f(e_1) \dots f(e_n) \,] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

2) I vettori $f(\bar{e}_i)$ si scrivono in componenti come comb. lineari

$$f(\bar{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, \bar{e}'_j$$

rispetto B_W

$$f(\bar{v}) = \left[{}^{T}\vec{E}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \; {}^{T}\vec{E}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdots \; {}^{T}\vec{E}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

($f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_2)$, $f(\bar{e}_n)$)

$$f(\bar{v}) = {}^{T}\bar{E}' \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

passando in componenti: abbiamo che l'immagine del vettore di componenti $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ rispetto $\mathcal{B}_V$ ha componenti:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{con } A = (a_{ij})$$

rispetto la base $\mathcal{B}_W$ in W.

FISSATE $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ esiste un isomorfismo fra lo sp. vettoriale $\mathrm{Hom}(V;W) := \{f : V \to W \text{ lineari}\}$ e $\mathbb{K}^{m,n}$ con $\dim V = n$, $\dim W = m$.

$$f : V \to W$$

associamo la matrice

$$A_F := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ove}$$

ogni colonna di A è le rapp. dell'immagine di $f(\bar{e}_i)$ rispetto la base $\mathcal{B}_W$.

$$\mathbb{K}^{m,n} \longrightarrow \mathrm{Hom}(V;W)$$

$$((a_{ij})) \longrightarrow \begin{cases} f : V \to W \\ \text{telle que } f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \bar{e}'_i \end{cases}$$

$A \in \mathbb{K}$ $\quad B \in$ $\quad C \in$

$$\mathbb{K}^{m,n} \longrightarrow \mathrm{Hom}(V;W)$$

$$(a_{ij}) \longrightarrow f: V \to W \text{ tale che } f(\bar{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{e}_i'$$

COROLLARIO: Il prodotto di matrici è associativo!

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,t}$, $C \in \mathbb{K}^{t,s}$

$AB \in \mathbb{K}^{m,t}$

$(AB)C \in \mathbb{K}^{m,s}$

BA

$BC \in \mathbb{K}^{n,s}$

$A(BC) \in \mathbb{K}^{m,s}$

$(AB)C = A(BC)$

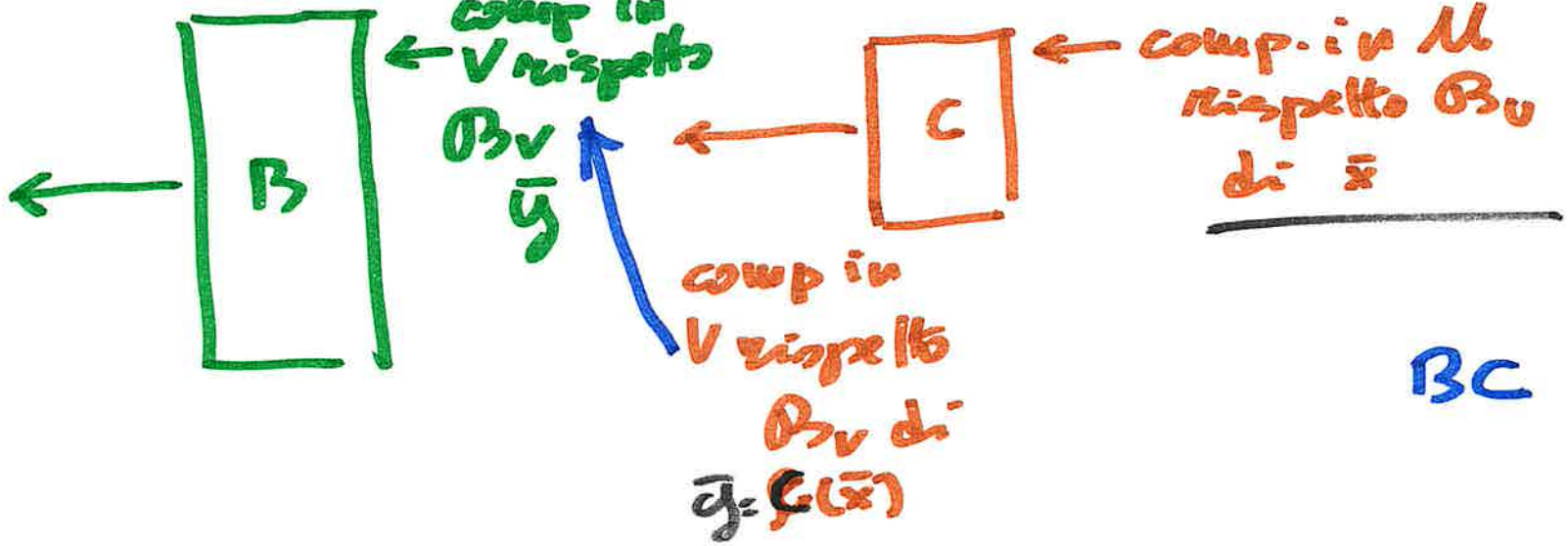
$$\mathcal{U} \xrightarrow{c} V \xrightarrow{b} W \xrightarrow{a} T$$

$$b(\bar{y}) = b(c(\bar{x})) \qquad \mathbb{K}^s \xrightarrow{C} \mathbb{K}^t \xrightarrow{B} \mathbb{K}^n \xrightarrow{A} \mathbb{K}^m$$

$$C \in \mathbb{K}^{t,s} \qquad B \in \mathbb{K}^{n,t} \qquad A \in \mathbb{K}^{m,n}$$

$\|$

comp. in W di $b(\bar{y})$ rispetto $\mathcal{B}_W$



BC

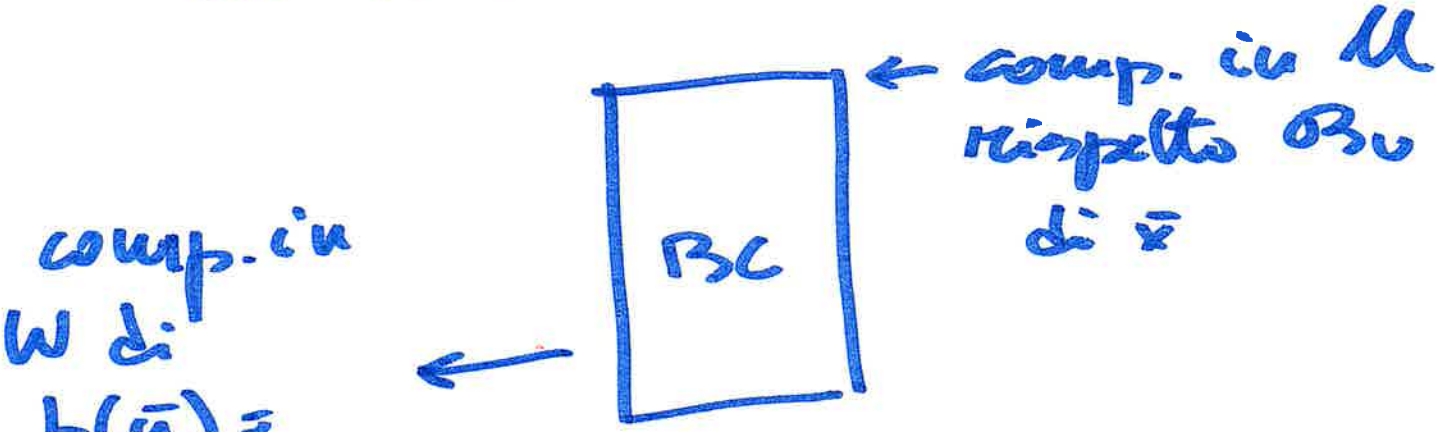
Siano date basi di $T, \mathcal{U}, V, W$

e supponiamo $\dim \mathcal{U} = s$
$\dim V = t$
$\dim W = n$
$\dim T = m$

siano $C : \mathcal{U} \to V$
$B : V \to W$
$A : W \to T$
funzioni lineari

fissate delle basi possiamo vedere le funzioni come matrici

La matrice BC ha



BC rappresenta la funzione composta $(b \circ a)$ rispetto le basi $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_W$

→ CONSEGUENZA: DATO CHE LA COMP. DI FUNZIONI È ASSOCIATIVA

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \Rightarrow A(BC) = (AB)C$$

proprietà del prodotto/somma di matrici.

Siano $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,t}$ $\Rightarrow$

$A' \in$ $\quad$ $B' \in \mathbb{K}^{n,t}$

$AB \in \mathbb{K}^{m,t}$

$$A(B+B') = AB + AB'$$

$$(A+A')B = AB + A'B$$

In generale in $\mathbb{K}$ anche se possibile $AB \neq BA$ il prod. non è commutativo.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 11 \qquad \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 6\\4 & 8\end{pmatrix}$$

$$(\alpha A)B = \alpha(AB)$$

vale, quando il prod. è possibile, la prop. associativa.

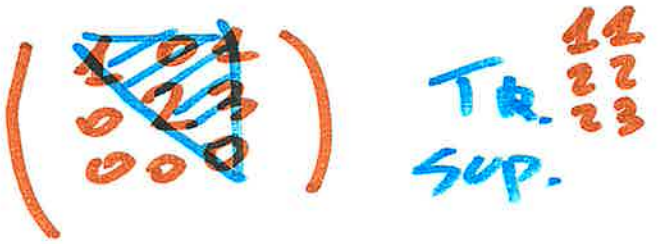
Def: Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta **matrice quadrata**

Una matrice A quadrata le cui uniche entrate $\neq 0$ si trovano in posizione (i,i) è detta **diagonale**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

le entrate del tipo (i,i) si dice che sono sulla **diagonale principale**

Una matrice A quadrata è detta triangolare superiore (inferiore) se $\forall\, i>j$ ($i<j$) le entrate a_{ij} sono zero.



Def: Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ quadrata è detta **invertibile** se $\exists\, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I_n$

La matrice $I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ è detta matrice identica.

Una matrice A è invertibile $\Leftrightarrow$ l'applicazione lineare associata ad essa è invertibile.

Infatti la app. lineare associata ad I_n

$$\begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ \bar{v} \to I\bar{v} = \bar{v} \end{cases}$$

è l'applicazione identica.

Quindi A invertibile vuol dire che posto

$$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$X \to AX$$

le funzione f_A ammette inversa

$\Rightarrow f_A$ deve essere bijettiva.

<u>OSS</u>: Sia $\mathbb{K}$ un campo e

$GL(n,\mathbb{K}) = \{ M \in \mathbb{K}^{n,n} \mid M \text{ invertibile} \}$

$\Rightarrow GL(n,\mathbb{K})$ è un gruppo non commutativo.

$\rightarrow GL(n,\mathbb{K})$ corrisponde al gruppo di tutte le applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ bijettive. = isomorfismi di $\mathbb{K}^n$.

$ax=b$ con $a \neq 0$ $\quad AX=B \rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$X = IX = A^{-1}B$