S sequenza libera $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$

$\Leftrightarrow \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0} \Rightarrow (\alpha_1 \dots \alpha_n) = (0 0 \dots 0)$

S sequenza di generatori $(\bar{w}_1 \dots \bar{w}_K) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \bar{v} \in V \; \exists (\beta_1 \dots \beta_K) \in \mathbb{K}^K$

con un numero finito di coeff $\neq 0$

tali che $\bar{v} = \beta_1 \bar{w}_1 + \dots + \beta_K \bar{w}_K$

$\mathcal{B}$ base di $V(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \mathcal{B}$ sequenza libera e di generatori:

$(\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$.

$\forall \bar{v} \in V \; \exists! (\gamma_1 \dots \gamma_n) : \bar{v} = \gamma_1 \bar{b}_1 + \gamma_2 \bar{b}_2 + \dots \gamma_n \bar{b}_n$

ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare di vettori di $\mathcal{B}$

$V(\mathbb{K})$ sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ e

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n)$ è una sua base $\Rightarrow$

$$\psi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow V \\ (a_1 \cdots a_n) \longrightarrow a_1\bar{e}_1 + \cdots + a_n\bar{e}_n \end{cases}$$

è un isomorfismo. $\Phi_{\mathcal{B}} := \psi_{\mathcal{B}}^{-1}$

coordinatizzazione

associa ad ogni $\bar{v} \in V(\mathbb{K})$ le sue componenti $\rightarrow$ vettore di $\mathbb{K}^n$.

oss: 1) le sequenze di generatori sono "grandi"

Sia S una seq. di generatori; X un insieme di vettori $\Rightarrow$ $S \cup X$ è una seq. di generatori

$\forall \bar{v} \in V \; \exists (\bar{s}_1 \dots \bar{s}_k) \in S$ & $(a_1 \dots a_k) \in \mathbb{K}^k : a_1\bar{s}_1 + \dots + a_k\bar{s}_k = \bar{v} \Rightarrow (\bar{s}_1 \dots \bar{s}_k) \in S \cup X$.

2) le sequenze libere sono "piccole".

Sia $A = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ una seq. libera $\Rightarrow$

$\forall \; a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n = \underline{0} \iff (a_1 \dots a_n) = (0\,0 \dots 0)$.

In particolare se esistesse $C \subseteq A$ con $C \neq \emptyset$ legata $\Rightarrow \exists \; \bar{v}_1 \dots \bar{v}_r \in A$ con

$$\hat{a}_1\bar{v}_1 + \dots \hat{a}_r\bar{v}_r = \underline{0} \quad (\hat{a}_1 \dots \hat{a}_r) \neq (0\,0 \dots 0)$$

$$\Rightarrow \hat{a}_1\bar{v}_1 + \dots + \hat{a}_r\bar{v}_r + 0\bar{v}_{r+1} + \dots + 0\bar{v}_n = \underline{0}$$

con non tutti coeff $= 0 \Rightarrow$ $\lightning$.

S di generatori $\Rightarrow$ $S \cup X$ di generatori

A libera $\Rightarrow$ $A \setminus X$ libera se $A \setminus X \neq \emptyset$

Metodo degli scarti successivi

INPUT: Seq. di generatori S finita

OUTPUT: $\begin{cases} \emptyset \\ \text{seq. libera di generatori } S' \subseteq S. \end{cases}$

Dim: 1) S libera $\Rightarrow$ rest. S $\Rightarrow$ FINE

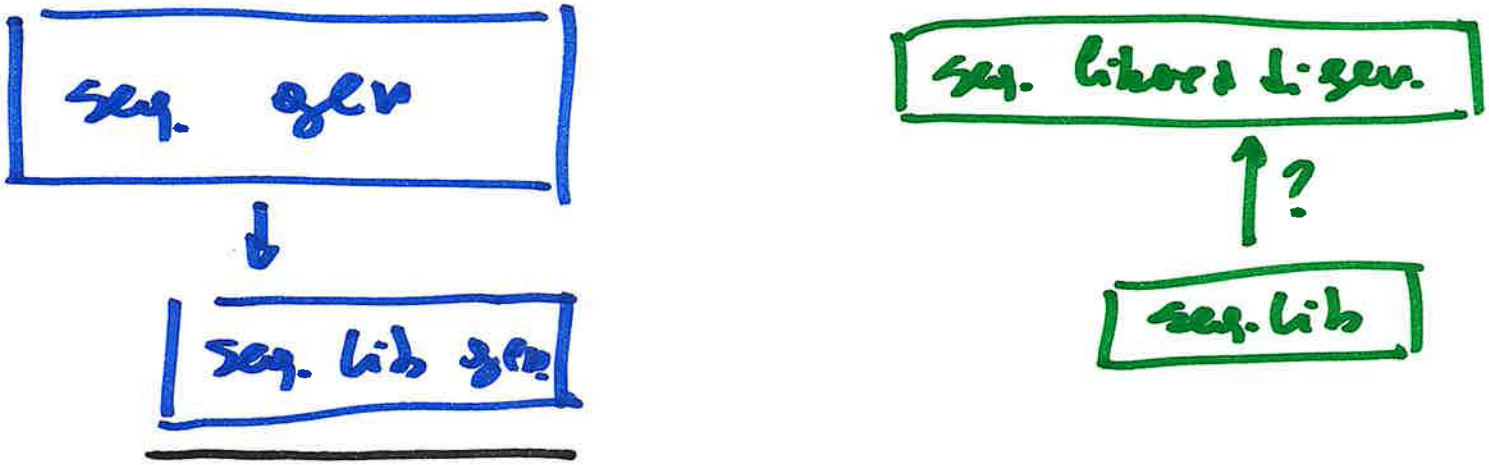
2) $S = \emptyset$ $\Rightarrow$ rest. S $\Rightarrow$ FINE

3) $\Rightarrow S$ legata $\Rightarrow$ $\exists \bar{v} \in S$ che è c. lineare di un numero finito di rimanenti vettori

$\Rightarrow S' \leftarrow S \setminus \{\bar{v}\}$ e ancora una seq. di generatori

per il medesimo sottospazio $\mathcal{L}(S)$

4) → si ritorna al punto 1 sostituendo S' ad S.



$S = [(1\,0), (0\,1), (1\,1), (2\,1), (-1\,1))$

$((1\,0), (0\,1))$ $((0\,1), (1\,1))$ $((-1\,1), (2\,1))$ etc. etc.

Lemma di Steinitz: Siano $A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$ una sequenza libera di m vettori

$B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ una sq. di n generatori

per uno stesso s. vettoriale V.

$$\Rightarrow \quad \boxed{m \leq n}$$

Una sequenza libera di $V(\mathbb{K})$ contiene al più tanti elementi quanti una sq. di generatori.

Una sequenza di generatori di $V(\mathbb{K})$ contiene almeno tanti elementi quanti una sua (più grande) sq. libera.

CONSEGUENZA #1.

Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale fin. generato e siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due sue basi

$\mathcal{B} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)$ e $\mathcal{B}' = (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n)$.

$\Rightarrow m = n$.

DIM: $\mathcal{B}$ libera e $\mathcal{B}'$ di gen $\Rightarrow m \leq n$

$\mathcal{B}'$ libera e $\mathcal{B}$ di gen $\Rightarrow n \leq m$ $\Rightarrow n = m$

□

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Se $V(\mathbb{K}) = \{\underline{0}\} \Rightarrow$ poniamo $\dim V := 0$ (dimensione di V).

Se $V(\mathbb{K}) \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow$ si dice dimensione di $V(\mathbb{K})$ la cardinalità di una qualsiasi sua base. $\dim V = n$

N.B. Se $\dim V = n < \infty$ $\quad V(\mathbb{K})$

$\Rightarrow V \cong \mathbb{K}^n$ $\quad V$ e $\mathbb{K}^n$ sono isomorfi.

La struttura di uno spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$ di dimensione finita (e quindi finitamente generato) è determinata univocamente da

- $n_0 \in \mathbb{N}_0$
- $\mathbb{K}$

$\mathbb{K}^n \rightarrow$ esempio di sp. vettoriale di dim $= n$

$\rightarrow$ prototipo.

DIM Lemma di Steinitz.

$A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$ liberi
$B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ di generatori $\Big\rangle$ per $V(\mathbb{K})$.

supponiamo per assurdo $n < m$.

procediamo per passi (n passi).

n=1 $\bar{a}_1 \in \mathcal{L}(B) \Rightarrow \exists (\alpha_{11} \dots \alpha_{1n}) \in \mathbb{K}^n$:

$$\alpha_{11}\bar{b}_1 + \dots + \alpha_{1n}\bar{b}_n = \bar{a}_1$$

non può essere $(\alpha_{11} \dots \alpha_{1n}) = (0\,0 \dots 0)$

perché in quel caso $\bar{a}_1 = \underline{0}$ ma A è sequenza libera e se contenesse $\underline{0} \Rightarrow 1\cdot\bar{a}_1 + 0\cdot\bar{a}_2 + \dots + 0\bar{a}_m = \underline{0}$

$\Rightarrow A$ sarebbe legata.

WLOG $\alpha_{11} \neq 0 \Rightarrow \bar{b}_1 = \alpha_{11}^{-1}(\bar{a}_1 - \alpha_{12}\bar{b}_2 \dots - \alpha_{1n}\bar{b}_n)$

$$\Rightarrow \bar{b}_1 \in \mathcal{L}(\bar{a}_1, \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$$

$\mathcal{B}^{(1)} := (\bar{a}_1\ \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$ è un insieme/sq. di generatori per V.

$$\forall \bar{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}): \bar{v} = \beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_n \bar{b}_n =$$

$$= \beta_1 (+\alpha_{11}^{-1} \bar{a}_1 - \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12} \bar{b}_2 \dots - \alpha_{11}^{-1} \alpha_{1n} \bar{b}_n) +$$

$$+ \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_n \bar{b}_n \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)})$$

$$\Rightarrow V = \mathcal{L}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)}) \subseteq V \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)}).$$

$A = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n\ \bar{a}_{n+1} \dots \bar{a}_m)$ $\quad m > n$

$\mathcal{B}^{(1)} = (\bar{a}_1\ \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$

$\bar{a}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}'') \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{a}_2 = \alpha_{21}\bar{a}_1 + \alpha_{22}\bar{b}_2 + \dots + \alpha_{2n}\bar{b}_n$

oss: $(\alpha_{22} \dots \alpha_{2n}) \neq (0\,0 \dots 0)$ perché altrimenti:

$\bar{a}_2 = \alpha_{21}\bar{a}_1$

$\Rightarrow \alpha_{21}\bar{a}_1 - \bar{a}_2 = \underline{0}$ $\lightning$ perché A è libera.

WLOG $\alpha_{22} \neq 0 \Rightarrow$

$$\bar{b}_2 = \alpha_{22}^{-1}(\bar{a}_2 - \alpha_{21}\bar{a}_1 - \alpha_{23}\bar{b}_3 \dots - \alpha_{2n}\bar{b}_n)$$

$\Rightarrow \bar{b}_2 \in \mathcal{L}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n)$

come prima si verifica che

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)}) = \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(2)})$$

ove $\mathcal{B}^{(2)} = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{b}_3 \cdots \bar{b}_n)$

Dopo n passaggi.

libera $\rightarrow A = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n \mid \bar{a}_{n+1} \cdots \bar{a}_m)$

dipen. $\rightarrow \mathcal{B}^{(n)} = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n) \mid$

$\bar{a}_{n+1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(n)}) \Rightarrow \exists\ \gamma_1 \cdots \gamma_n$ reali che

$$\bar{a}_{n+1} = \gamma_1 \bar{a}_1 + \cdots + \gamma_n \bar{a}_n \Rightarrow$$

$$\gamma_1 \bar{a}_1 + \cdots + \gamma_n \bar{a}_n - \bar{a}_{n+1} = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ A legata $\forall$ contro l'ipotesi.

$\Rightarrow$ CONSEGUENZA $\boxed{m \leq n}$ $\square$

Conseguenze del Lemma di Steinitz.

1) Ogni 2 basi di $V_n(\mathbb{K})$ sp. vettoriale fin. generato hanno lo stesso numero di elementi.

[$V_n(\mathbb{K})$ si intende uno s.vett. di dim $= n$ su $\mathbb{K}$]

2) Supponiamo $\dim V = n \Rightarrow$ ogni sequenza di n generatori è una base.

3) Supponiamo $\dim V = n \Rightarrow$ ogni seq. libera di n vettori è una base.

4) Una seq. di $k<n$ vettori di $V_n(\mathbb{K})$ non può essere di generatori.

5) Una seq. di $k>n$ vettori di $V_n(\mathbb{K})$ non può essere libera.

6) Una base è una seq. massimale di vettori ~~generatori~~ vettori liberi

7) Una base è una seq. minimale di generatori (a meno che $V=\{0\}$).

Dim 4) Se $|S|=k<n=|\mathcal{B}|$ con $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow \exists$ seq. libera di n vettori $\Rightarrow$ per steinitz non $\exists$ seq. di $k<n$ generatori $\Rightarrow$ S non genera.

5) Se $|S|=k>n=|\mathcal{B}|$ con $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow \exists$ seq. di n generatori $\Rightarrow$

per steinitz non $\exists$ sq. di $k > n$ vettori
libera $\Rightarrow$ S non può essere libera.

2) Supponiamo S di generatori e $|S| = n = |\mathcal{B}|$
Se S fosse legata $\Rightarrow$ $\exists \bar{v} \in S$ tale che

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}\}) \Rightarrow S \setminus \{\bar{v}\} \text{ di}$$

generatori e $|S \setminus \{\bar{v}\}| = n - 1$

$\lightning$ per steinitz in quanto c'è una sq.
libera di n vettori.

3) Supponiamo S libera $|S| = n = |\mathcal{B}|$ e che
S non sia di generatori $\Rightarrow \exists \bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{L}(S)$

Consideriamo la seq.

$S \cup \{\bar{v}\}$.

questa è libera in quanto se $\exists (\alpha_1 \dots \alpha_n, \beta)$

con $\alpha_1 \bar{s}_1 + \alpha_2 \bar{s}_2 + \dots \alpha_n \bar{s}_n + \beta \bar{v} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ NON PUÒ ESSERE $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (00 \dots 0)$

IN QUANTO ALTRIMENTI

$$\beta \bar{v} = -\alpha_1 \bar{s}_1 \dots -\alpha_n \bar{s}_n \in \mathcal{L}(S)$$

$\Rightarrow$ deve essere $\beta \bar{v} = \underline{0}$ ma $\bar{v} \neq \underline{0}$

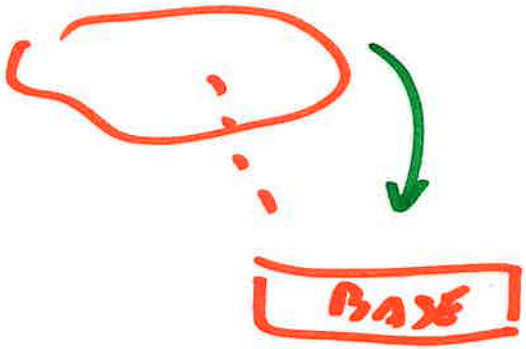
in quanto $\underline{0} \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow S \cup \{\bar{v}\}$ libera e $|S \cup \{\bar{v}\}| = n+1$

$\Downarrow$ per assurdo in quanto $\exists$ una seq. di n generatori.

7): APPLICHIAMO AD UNA SEQ. FINITA DI GEN.
IL METODO DEGLI SCARTI SUCC.

→ O ARRIVIAMO A ϕ
→ oppure ARRIVIAMO AD UNA BASE → n vettori:
le non possiamo togliere altri vettori
per 4).

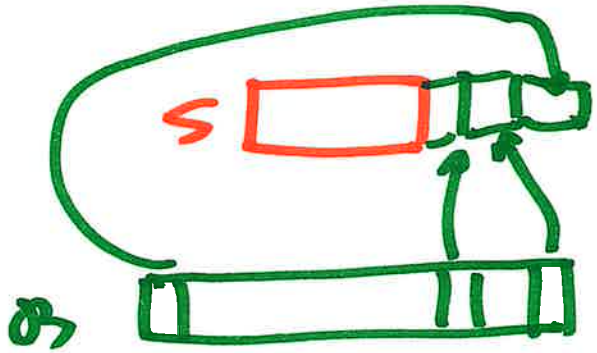


6) Metodo di completamento della base.

Sia $V_n(\mathbb{K})$ s.vettoriale f.g. di $\dim V = n > 0$
e sia $\mathcal{B} = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ una sua qualsiasi base.
Sia inoltre $S = (\bar{v}_2 \dots \bar{v}_k)$ una sua sequenza libera di vett.

ALLORA $\exists\ \bar{b}_{i_1} \dots \bar{b}_{i_{n-k}} \in \mathcal{B}$ (n-k vettori)

tali che $S \cup \{\bar{b}_{i_1} \dots \bar{b}_{i_{n-k}}\}$ sia una base di $V_n(\mathbb{K})$.



DIM: $(\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \dots \bar{v}_k) = S$ libera

$(\bar{b}_1\ \bar{b}_2 \dots \bar{b}_k \dots \bar{b}_n) = \mathcal{B}$ gen.

esattamente come nella dim. di Steinitz sostituiamo k vettori di $\mathcal{B}$ con i k vettori di S.

$\Rightarrow$ OTTENIAMO $\mathcal{B}^{(k)}$ che è ancora di generatori.;

contiene S; ed ha $n = \dim V$ vettori

$\Rightarrow \mathcal{B}^{(4)}$ è una base!

□

Esempi ed osservazioni.

$$\mathbb{K}^n = \{(a_1 \dots a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\} =$$

$$= \mathcal{L}((100\dots0), (0100\dots0), \dots (000\dots1))$$

$$\qquad\quad \| \qquad\qquad\quad \| \qquad\qquad\quad \|$$

$$\qquad\quad \bar{e}_1 \qquad\qquad\quad \bar{e}_2 \qquad\qquad\quad \bar{e}_n$$

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots \bar{e}_n)$ è detta <u>base canonica</u> di $\mathbb{K}^n$

$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

$\mathcal{B} = ((100), (010), (001))$

$a(100) + b(010) + c(001) = (a,b,c)$

Il vettore delle componenti di (a,b,c) rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è (a,b,c)

$\mathcal{B}' = ((100), (001), (010))$

componenti di (a,b,c) rispetto $\mathcal{B}'$

$(a\ c\ b)$!!

$\mathbb{R}[x]_{\leq 3} := \{ f(x) : \deg f(x) \leq 3 \}$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

$a + bx + cx^2 + dx^3 \longrightarrow (a\ b\ c\ d)$

$\mathbb{R}^{2,2} = \{ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f \text{ lineare} \}$.

Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ una base di $\mathbb{R}^2$

$(1\ 0), (0\ 1)$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare

$$f(\bar{v}) = f(a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2) = a_1 f(\bar{e}_1) + a_2 f(\bar{e}_2)$$

$$f(\bar{e}_1) = b_{11}\bar{e}_1 + b_{21}\bar{e}_2$$
$$f(\bar{e}_2) = b_{12}\bar{e}_1 + b_{22}\bar{e}_2 \quad \text{rispetto la base di } \mathbb{R}^2$$

la funzione f è univocamente def.
dai valori di $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ e $\mathcal{B}$.

$$f(a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2) = (a_1 b_{11} + a_2 b_{12})\bar{e}_1 +$$
$$+ (a_1 b_{21} + a_2 b_{22})\bar{e}_2$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_{11} + a_2 b_{12} \\ a_1 b_{21} + a_2 b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$f(\bar{e}_1) \quad f(\bar{e}_2) \qquad f(a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n$$

prodotto righe per colonne
fra matrici.