$p(x) \in \mathbb{C}[x]_{\leq t}$ $\qquad a_0, a_1 \dots, a_t, a_{t+1} \in \mathbb{C}$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^i \qquad \xrightarrow{f} \qquad (p(a_0), p(a_1) \dots p(a_t))$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$(a_0\ a_1 \dots a_t) \qquad\qquad\qquad\qquad (b_0\ b_1 \dots\ b_t)$$

$$f: \begin{cases} \mathbb{K}^{t+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{t+1} \\ (a_0 \dots a_t) \longmapsto (g(a_0) \dots g(a_t)) \end{cases} \text{ ove}$$

$$g(a_i) = \sum_{j=0}^{t} a_j a_i^j$$

La funzione $f: \mathbb{K}^{t+1} \to \mathbb{K}^{t+1}$ è lineare.

$$f(\lambda(a_0 \dots a_t) + \mu(b_0 \dots b_t)) =$$

$$= f(\lambda a_0 + \mu b_0, \dots \lambda a_t + \mu b_t) =$$

$$= \left(\sum_j (\lambda a_j + \mu b_j)\alpha_0^j, \sum_j (\lambda a_j + \mu b_j)\alpha_1^j \dots\right) =$$

$$= \lambda\left(\sum a_j \alpha_0^j \ \sum a_j \alpha_1^j \dots \ \sum a_j \alpha_t^j\right) +$$

$$+ \mu\left(\sum b_j \alpha_0^j \ \sum b_j \alpha_1^j \dots \ \sum b_j \alpha_t^j\right) =$$

$$= \lambda f(a_0 \dots a_t) + \mu f(b_0 \dots b_t).$$

$$\ker(f) = \{ p(x) \in \mathbb{K}[x]_{\le t} : p(\alpha_0) = p(\alpha_1) = \dots p(\alpha_t) = 0 \}.$$

Ker f consiste di tutti i polinomi di grado al più t con $(t+1)$ radici distinte $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{t+1} \Rightarrow \ker f = \{0\}$.

f è iniettiva.

f è anche suriettiva (lo dim. dopo).

$(a_0\ a_1 \dots a_t)$ $\quad$ $(b_0\ b_1 \dots b_t)$

rappresentano la stessa cosa!

Siano $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]_{\le t}$ $\deg(p(x)) \le \frac{t}{2}$ $\deg(q(x)) \le \frac{t}{2}$

$p(x)+q(x)$

$p(x)=\sum p_i x^i$

$q(x)=\sum q_i x^i \Rightarrow p(x)+q(x)=(p+q)(x)=\sum (p_i+q_i)x^i$

$\hat{p}_0 = p(\alpha_0)$ $\hat{p}_1 = p(\alpha_1) \cdots$ $\hat{p}_t = p(\alpha_t)$

$\hat{q}_0 = q(\alpha_0) \cdots$ $\hat{q}_t = p(\alpha_t)$

$\widehat{p_\bullet + q_\bullet} = (\hat{p}_0+\hat{q}_0,\ \hat{p}_1+\hat{q}_1 \cdots \hat{p}_t+\hat{q}_t)$.

$(p\cdot q)(x) = \left(\sum_i p_i x^i \cdot \sum_j q_j x^j\right)$

$\widehat{p\cdot q}^{\bullet} = (\hat{p}_0\cdot\hat{q}_0\ \ \hat{p}_1\cdot\hat{q}_1 \cdots \hat{p}_t\cdot\hat{q}_t)$

$(2x+3)(x+5) = 2x^2 + 10x + 3x + 15$

$= 2x^2 + 13x + 15$

$(3, 5, 7)$ $\quad$ $(5, 6, 7)$

$p(0)$ $p(1)$ $p(2)$

$(15, 30, 49)$

$26 + 8 = 34$

15

49

Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale sul campo $\mathbb{K}$.

Def: Una sequenza di vettori $\bar{v}_1 \bar{v}_2 \dots \bar{v}_k \in V(\mathbb{K})$ è detta **libera** e i suoi elementi: **linearmente indipendenti** se l'unica combinazione lineare dei suoi elementi che dà $\underline{0}$ è a coeff. tutti nulli.

$$\left[\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k \text{ libera} \iff a_1\bar{v}_1 + \dots + a_k\bar{v}_k = \underline{0} \Rightarrow (a_1 \dots a_k) = (0\,0 \dots 0)\right]$$

Una sequenza è **legata** (ed i suoi vettori sono **linearmente dipendenti**) se non è libera

$\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ legati $\iff$

$\exists (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k) \neq (00\dots0)$:

$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k = \underline{0}$

Def: Sia $X \subseteq V(\mathbb{K})$. Si dice copertura lineare di X e si indica con $\mathcal{L}(X)$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari di un numero finito di elementi di X.

(tutte le c. lineari di el. di X in cui c'è un numero finito di coeff. $\neq 0$).

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i \mid n \in \mathbb{N}_0, \alpha_i \in \mathbb{K} \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{\bar{x}_i \in X} \alpha_i \bar{x}_i \;\middle|\; \{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\} < \infty \right\}. \quad \mathcal{L}(\emptyset) = \{0\}.$$

Teorema: Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ e $X \subseteq V$.

1) $\mathcal{L}(X) \leq V(\mathbb{K})$ è un sottospazio.
2) $\mathcal{L}(X)$ è il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ che contiene X
   [Se $W \leq V(\mathbb{K})$ ed $X \subseteq W \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq W$]
3) Se $X \leq V(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \mathcal{L}(X) = X$
4) Se $X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(Y)$
5) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(X)$

DIM: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \bar{u}, \bar{w} \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \alpha\bar{u} + \beta\bar{w} \in \mathcal{L}(X)$

$$u \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \bar{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i \quad \text{con } \bar{x}_i \in X$$

$$\bar{w} = \sum_{j=n+1}^{m} \beta_j \bar{x}_j \quad \text{con } \bar{x}_j \in X$$

$$\Rightarrow \alpha\bar{u} + \beta\bar{w} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i + \beta \sum_{j=n+1}^{m} \beta_j \bar{x}_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i)\bar{x}_i + \sum_{j=n+1}^{m} (\beta\beta_j)\bar{x}_j$$

$\Rightarrow$ è una c. lineare di un numero finito di elementi di X

$\Rightarrow \alpha\bar{u} + \beta\bar{w} \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \mathcal{L}(X) \leq V(\mathbb{K})$.

2) Sia W sottospazio ed $X \subseteq W$

$\Rightarrow$ ogni c. lineare di un numero finito di elementi di X deve appartenere a W in quanto ogni c. lineare di un numero finito di elementi di W appartiene a W* perché è sottospazio $\Rightarrow \forall \bar{y} \in \mathcal{L}(X) : \bar{y} \in W \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq W$.

* ogni c. lineare di 2 elementi di W è un elemento di W (per le prop. dei sottospazi)

Supponiamo di avere la proprietà che

Ipotesi: $\forall\, 1 \le t < n$ ogni c.lineare di t elementi appartiene a W $\rightarrow$ mostriamo che ogni c.lineare di n elementi $\in W$.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{w}_i = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \bar{w}_i + \underbrace{(\alpha_{n-1}\bar{w}_{n-1} + \alpha_n \bar{w}_n)}_{\bar{s} \in W} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \bar{w}_i + \bar{s}$$

$\rightarrow$ c.lineare di $t = n-1 < n$ elementi

$\Rightarrow \in W$.

□

3) Se $X \subseteq V(\mathbb{K})$ $\Rightarrow$ il più piccolo sottospazio che contiene X è X stesso $\Rightarrow$ $X = \mathcal{L}(X)$

4) Se $X \subseteq Y$ $\Rightarrow$ ogni c.lineare di un numero finito di el. di X è anche c.lineare di un numero finito di elementi di Y $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(Y)$

5) $\mathcal{L}(X) \subseteq V(\mathbb{K})$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(X)$ per (3) $\square$

$\mathcal{L}(X)$ = copertura lineare
chiusura lineare

Def: Se $W \subseteq V(\mathbb{K})$, $X \subseteq W$ e

$W = \mathcal{L}(X) \Rightarrow$ si dice che W è <u>generato</u> da X

e gli elementi di X sono un { insieme / sequenza / sistema } di

<u>generatori</u> per W.

Def: $W \subseteq V(\mathbb{K})$ è detto <u>finitamente generato</u>

se $\exists X \subseteq W$ con $|X| < \infty$ e $W = \mathcal{L}(X)$.

oss: In generale uno s.vettoriale ha un numero ∞ di elementi. Una sequenza di generatori ci permette di ottenerli a partire da un sottoinsieme (se V f.g. $\Rightarrow$ insieme finito!)

Esempi: $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}((100),(110),(001),(123))$

$\alpha(100) + \beta(110) + \gamma(001) + \delta(123)$

$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}((100),(020),(001))$

Proposizione: Siano $f: V \to W$ una applicazione lineare ed $X \subseteq V$ un insieme di generatori per V.

Allora $\mathrm{Im}(f) := \mathcal{L}(\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in X\})$.

$f(X) := \{f(\bar{x}) : \bar{x} \in X\}$

DIM: Sia $\bar{y} \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists\, \bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \bar{y} \Rightarrow$

poiché X di generatori per V

$$\bar{v} = \sum_i a_i \bar{x}_i$$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) = f\left(\sum_i a_i \bar{x}_i\right) = \sum_i a_i f(\bar{x}_i) \in \mathcal{L}(f(x_1) \dots f(x_n) \dots)$$

$\bar{y}$

$$= \mathcal{L}(f(X)).$$

□

oss 2: $f(\bar{v})$ dipende da come $\bar{v}$ è scritto in c. lineare di vettori di X (cioè a_i) e dai valori $f(\bar{x}_i)$ al variare di $\bar{x}_i \in X$.

$$f\left(\sum_i a_i \bar{x}_i\right) = \sum_i a_i f(\bar{x}_i).$$

Esercizio.

$$f: (a\ b\ c) \to (a,\ a+b+c,\ a+2b+4c)$$

$$g(x) = a + bx + cx^2$$

$$(a, b, c) \to (g(0), g(1), g(2))$$

$$(1\ 0\ 0) \to \alpha(1\ 1\ 1) +$$

$$(0\ 1\ 0) \to \beta(0\ 1\ 2) +$$

$$(0\ 0\ 1) \to \gamma(0\ 1\ 4) =$$

$$= (\alpha,\ \alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+2\beta+4\gamma) = (l, m, n)$$

$$\alpha = l \qquad \beta+\gamma = m-l \qquad 2\beta+4\gamma = n-l$$

$\alpha = \ell \qquad \beta = m - \ell - \gamma$

$$2m - 2\ell - 2\gamma + 4\gamma = n - \ell$$

$$2\gamma = n + \ell - 2m$$

$$\gamma = \frac{n + \ell - 2m}{2}$$

$$\beta = m - \ell - \gamma$$

$$\alpha = \ell$$

Teorema: Sia $S=(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ una sequenza libera di vettori di $V(\mathbb{K})$. Allora ogni vettore $\bar{w} \in \mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ si scrive in modo unico come c. lineare dei vettori di S.

$$\left[\forall \bar{w} \in \mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k) \; \exists! \, (\alpha_1 \dots \alpha_k) \in \mathbb{K}^n : \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k = \bar{w} \right]$$

DIM: $\Phi : \mathbb{K}^k \to \mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$

$$(\alpha_1 \dots \alpha_k) \to \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k$$

chiaramente Φ è suriettiva.

Φ è iniettiva $\Leftrightarrow$ $\ker \Phi = \{0\}$.

$$\ker \Phi := \{(a_1 \dots a_k) : a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_k \bar{v}_k = \bar{0}\} =$$

↳ poiché $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ è libera

$$= \{\bar{0}\} =$$

$$= \{(0\,0 \dots 0)\}.$$

Se $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ libera $\Rightarrow$ Φ è biiettiva

$\Rightarrow \forall \bar{w} \in \mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)\ \exists!\ (a_1 \dots a_k) \in \mathbb{K}^k$

tale che $a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_k \bar{v}_k = \bar{w}$. □

oss: Se $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ legata $\Rightarrow \ker \Phi \neq \{\bar{0}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ogni vettore si può scrivere in più modi.

DIM ALTERNATIVA

$$\bar{w} = \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k$$
$$= \beta_2 \bar{v}_2 + \dots + \beta_k \bar{v}_k$$

$$\Rightarrow \underline{0} = \bar{w} - \bar{w} = (\alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k) - (\beta_1 \bar{v}_1 \dots + \beta_k \bar{v}_k)$$

$$= (\alpha_2 - \beta_1)\bar{v}_2 + \dots (\alpha_k - \beta_k)\bar{v}_k$$

ma poiché $(\bar{v}_2 \dots \bar{v}_k)$ è libera

deve essere $\alpha_2 = \beta_2 \dots \alpha_k = \beta_k$

□

Def: Sia $V(/k)$ uno spazio vettoriale.
Si dice **base** di $V(/k)$ ogni sua **sequenza** libera di generatori.

ALCUNI TESTI CHIAMANO QUESTA **BASE ORDINATA**

E PER BASE INTENDONO INSIEME LIBERO DI GENERATORI.

Teorema: Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B}=(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n \dots)$ una sua base.

Allora ogni vettore $\bar{v}$ di $V(\mathbb{K})$ si scrive in modo unico come c. lineare

$\bar{v} = a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n + \dots$

e gli scalari $(a_1 \dots a_n \dots)$ sono detti componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Viceversa: se $\mathcal{B}$ è un insieme di vettori di $V(\mathbb{K})$

tale che ogni $\bar{v} \in V$ si scrive in modo unico come comb. lineare di un numero finito di elementi di $\mathcal{B} \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathcal{B}$ è una base.

DIM Se $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow \mathcal{B}$ di generatori $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ si scrive come c. lineare di ~~elementi~~ un numero finito di elementi di $\mathcal{B}$. $\Rightarrow$ poiché $\mathcal{B}$ base abbiamo anche che $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$

$\forall$ elemento di $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ si scrive in modo unico come c. lineare di un numero finito di elementi di $\mathcal{B} \Rightarrow$

$\exists! (a_1 \dots a_n \dots)$ tale che $\bar{v} = a_1\bar{e}_1 + \dots$

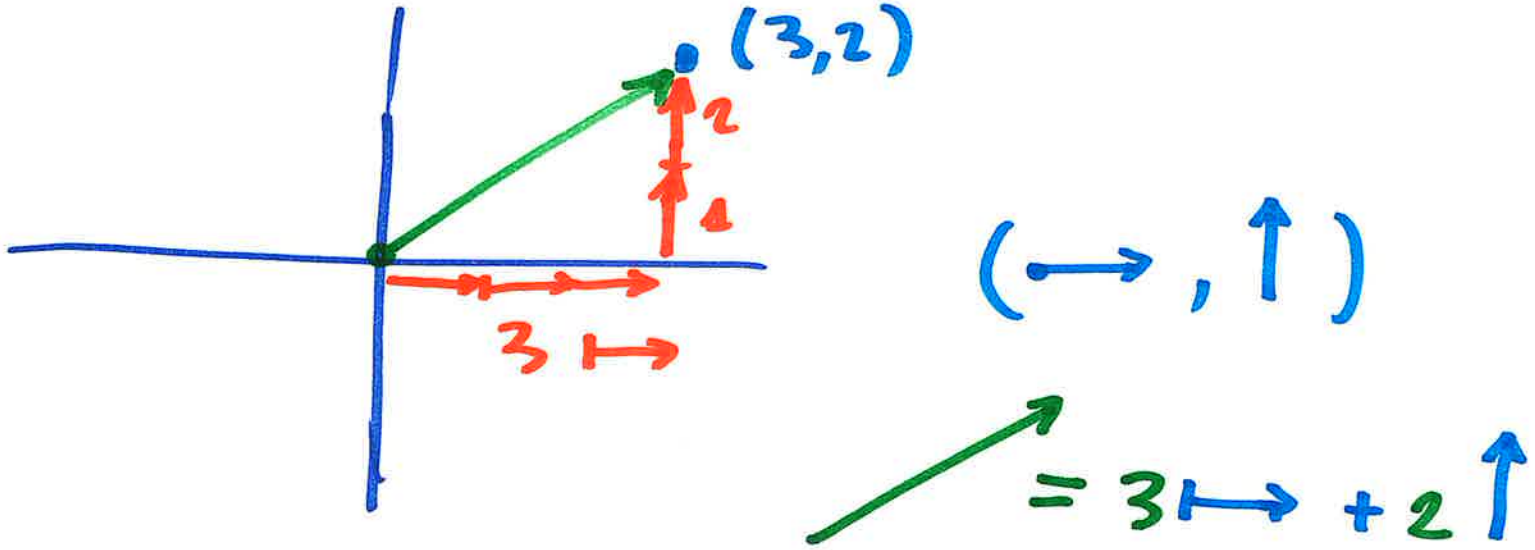
essendo $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$ abbiamo la tesi.

Viceversa. Se ogni el. di V è c. lineare di un numero finito di elementi di $\mathcal{B}$

$\Rightarrow V = \mathcal{L}(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$ è di generatori

e poiché $\forall$ elemento di $V = \mathcal{L}(\mathcal{B})$ si scrive in componenti in modo unico

$\mathcal{B}$ è libera. □



Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale finitamente generato e supponiamo che

$$\mathcal{B} = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$$

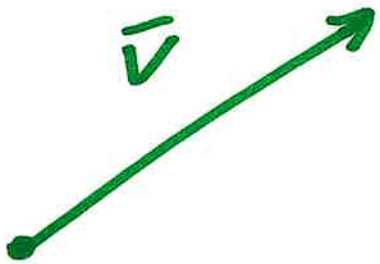
sia una sua base.

Consideriamo la funzione

$$\psi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow V(\mathbb{K}) \\ (a_1 \dots a_n) \longrightarrow a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n \end{cases}$$

definiamo $\Phi_{\mathcal{B}} := \psi_{\mathcal{B}}^{-1}$

$\Phi_{\mathcal{B}}$ è detta <u>coordinatizzazione</u> rispetto la base $\mathcal{B}$.



$\mathcal{B} = (\rightarrow, \uparrow)$

$\Phi_{\mathcal{B}}$ $= \Phi_{(\rightarrow,\uparrow)}$ =

$= \Phi_{(\rightarrow,\uparrow)} (3 \rightarrow +2\uparrow) = (3,2)$

$\Phi_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo di sp. vettoriali da $\underline{\underline{V(\mathbb{K})}}$ in $\underline{\underline{\mathbb{K}^n}}$