$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ campo

$(\mathbb{K}, +)$ gruppo abeliano

$(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ gruppo (abeliano)

$\exists 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \forall \alpha \in \mathbb{K} : 1 \cdot \alpha = \alpha$

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} : \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$:

$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

$V(\mathbb{K})$ sp. vettoriale su $\mathbb{K}$

$(V, +)$ gruppo abeliano.

$\mathbb{K} \times V \to V$ prod. per scalare

$1 \cdot \bar{u} = \bar{u} \quad \forall \bar{u} \in V$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall \bar{u} \in V : (\alpha\beta) \cdot \bar{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{u})$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$

$(\alpha+\beta) \cdot \bar{u} = \alpha \cdot \bar{u} + \beta \cdot \bar{u}$

$\alpha(\bar{u} + \bar{v}) = \alpha \cdot \bar{u} + \alpha \cdot \bar{v}$

1) $\mathbb{K}$ è sp. vettoriale su se stesso.

2) Sia X un insieme, $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$

$\Rightarrow V^X := \{ f : X \to V \mid f \text{ funzione} \}$

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con le operazioni

$$\cdot \begin{cases} \mathbb{K} \times V^X \longrightarrow V^X \\ (\alpha, f) \longrightarrow \alpha f : \begin{cases} X \to V \\ x \to \alpha f(x) \end{cases} \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} V^X \times V^X \longrightarrow V^X \\ (f, g) \longrightarrow f+g \begin{cases} X \to V \\ x \to f(x) + g(x) \end{cases} \end{cases}$$

Es. $X = \{1, 2 \dots n\}$. $V = \mathbb{K}$

$$V^X = \mathbb{K}^n = \{(a_1 \dots a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\}.$$

$$\alpha \cdot (a_1 \dots a_n) = (\alpha a_1 \dots \alpha a_n)$$

$$(a_1 \dots a_n) + (b_1 \dots b_n) = (a_1 + b_1 \dots a_n + b_n).$$

$\underline{\underline{\mathbb{K}^n}}$ esempio fondamentale!

$$\mathbb{K}[x] = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{h} a_i x_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Sp. vettoriale dei polinomi su $\mathbb{K}[x]$

$$\mathbb{K}[x] \leq \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$$

→ è sp. vettoriale.

$$\mathbb{K}[x]_{\leq t} := \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

polinomi a coeff. in $\mathbb{K}$ di grado $\leq t$

Es. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} = \{ (a_0, a_1 \dots a_n \dots) \mid a_i \in \mathbb{K} \}$.

insieme di tutte le successioni a valori in $\mathbb{K}$.

Def Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$

$\emptyset \neq S \subseteq V(\mathbb{K})$ è un <u>sottospazio</u> se S è a sua volta sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ rispetto le op. di $V(\mathbb{K})$ opportunamente ristrette e troncate.

OSS: Quello che serve è che S sia chiuso rispetto le operazioni date

$1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V \Rightarrow 1 \cdot \bar{s} = \bar{s} \quad \forall \bar{s} \in S \subseteq V$

$(\alpha\beta) \cdot \bar{v} = \alpha \cdot (\beta \bar{v}) \quad \forall \bar{v} \in V \Rightarrow$ vale anche $\forall \bar{s} \in S$.

idem per le prop. distributive.

Quello che non è garantito è che

$$\left.\begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \bar{s} \in S : \alpha \bar{s} \in S \\ \forall \bar{u}, \bar{v} \in S : \bar{u} + \bar{v} \in S \\ \qquad\qquad\quad \bar{u} - \bar{v} \in S \end{array}\right\} (*)$$

BISOGNA DIMOSTRARE CHE VALGONO (*)

poiché $(-1)\cdot\bar{s} = -\bar{s}$ la proprietà (*)
si possono riformulare dicendo che

(Δ) $\boxed{\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K},\ \forall \bar{u},\bar{v} \in S:\ \alpha\bar{u}+\beta\bar{v} \in S}$

proprietà di chiusura

(Δ) $\Rightarrow$ $(\alpha,\beta) = (1,1)$ $\bar{u}+\bar{v} \in S$

$(\alpha,\beta) = (1,-1)$ $\bar{u}-\bar{v} \in S$

$(\alpha,\beta) = (\alpha,0)$ $\alpha\bar{u} \in S$

se valgono (*) $\Rightarrow \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}\ \forall \bar{u},\bar{v} \in S:\ \alpha\bar{u},\beta\bar{v} \in S$

$\Rightarrow \alpha\bar{u}+\beta\bar{v} \in S$ □

$S \leq V(\mathbb{K})$ $\iff$ S è chiuso rispetto le combinazioni lineari di 2 qualsiasi suoi vettori.

$\iff$ S è chiuso rispetto le combinazioni lineari di un qualsiasi numero finito di suoi vettori

Def: Siano $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n \in V$; si dice combinazione lineare di $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n$ con i coeff. $\alpha_1 \dots \alpha_n$ il vettore

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$$

l'oss. in verde si vede dimostrata osservando che

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_{n-2} \bar{v}_{n-2} + \alpha_{n-1} \bar{v}_{n-1} + \alpha_n \bar{v}_n =$$

$$= \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_{n-2} \bar{v}_{n-2} + (\alpha_{n-1} \bar{v}_{n-1} + \alpha_n \bar{v}_n)$$

$$\| \; \bar{w}_{n-1}$$

OGNI C. LINEARE DI n vettori può riscriversi come C. LINEARE DI (n-1) vettori.

IK è sp. vettoriale su IK.

Q non è chiuso rispetto c. lineari di un numero infinito di suoi elementi.

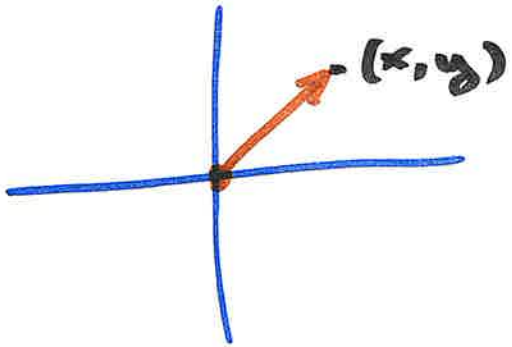
N.B. per la def. di sottospazio (ed anche dopo) servono combin. lineari finite.

S_2 sp. vettoriale dei vettori liberi del piano

$\mathbb{R}^2$ sp. vettoriale delle coppie di el. di $\mathbb{R}$.

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$\alpha\cdot(a,b)=(\alpha a,\alpha b)$



Def: Sia $\mathbb{K}$ un campo, $V(\mathbb{K})$, $W(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

Una funzione $f: V(\mathbb{K}) \to W(\mathbb{K})$ è detta <u>lineare</u> se

$$\left[\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V(\mathbb{K}) \quad f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v}) \right]$$

f manda combinazioni lineari di vettori di $V(\mathbb{K})$ in combinazioni lineari di vettori di $W(\mathbb{K})$

Def: Siano $V(\mathbb{K})$, $W(\mathbb{K})$ due sp. vettoriali su $\mathbb{K}$

ed $f: V(\mathbb{K}) \to W(\mathbb{K})$

una applicazione lineare.

$\underline{\ker(f)} := \{ \bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \underline{0} \}$.

oss: f lineare $V \to W \Rightarrow f$ omomorfismo $(V,+) \to (W,+)$

Esempio di f non lineare $\begin{cases} \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \\ (x,y) \to (\bar{x},\bar{y}) \end{cases}$

$(x,y)+(a,b) = (\bar{x},\bar{y})+(\bar{a},\bar{b})$

$\overline{\alpha(x,y)} = (\overline{\alpha x}, \overline{\alpha y}) = \bar{\alpha}(\bar{x},\bar{y})$

NO LINEARE

⊥

Teorema: 1) $\ker f \leq V(\mathbb{K})$ è un sott. di $V(\mathbb{K})$

2) f iniettiva $\iff \ker f = \{\underline{0}\}$.

3) $f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \iff \bar{x} - \bar{y} \in \ker f$

$\iff \bar{x} \in \bar{y} + \ker f :=$

$= \{\bar{y} + \bar{z} \mid \bar{z} \in \ker f\}$

$f(x) = \bar{h}$

Dim $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \ker f \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in \ker f$?

$f(\bar{u}) = \underline{0}$ e $f(\bar{v}) = \underline{0} \Rightarrow \alpha f(\bar{u}) = \underline{0}$ & $\beta f(\bar{v}) = \underline{0}$

$\Rightarrow \underline{0} = \underline{0} + \underline{0} = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v}) =$

$= f(\alpha\bar{u}) + f(\beta\bar{v}) =$

$f(\alpha\bar{u}+\beta\bar{v})$.

$\Rightarrow \alpha\bar{u}+\beta\bar{v} \in \ker(f)$.

2+3) $\bar{w} = f(\bar{u}) = f(\bar{v}) \Rightarrow \bar{0} = f(\bar{u}) - f(\bar{v}) =$

$= f(\bar{u}-\bar{v}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{u}-\bar{v} = \bar{z} \in \ker f$

se $\ker(f) = \{\bar{0}\} \Rightarrow \bar{u} = \bar{v}$ $\Rightarrow$ iniettiva

$\bar{u} = \bar{v} + \bar{z} \Rightarrow u \in \bar{v} + \ker f \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(\bar{w}) \subseteq \bar{v} + \ker f$

viceversa $\bar{u} = \bar{v} + \bar{z} \in \bar{v} + \ker f \Rightarrow$ $\bar{z} \in \ker f$

$\Rightarrow f(\bar{u}) = f(\bar{v}+\bar{z}) = f(\bar{v}) + f(\bar{z}) =$

$= f(\bar{v}) + \bar{0} = f(\bar{v}) \Rightarrow$

$\bar{v} + \ker(f) \subseteq f^{-1}(\bar{w})$ □

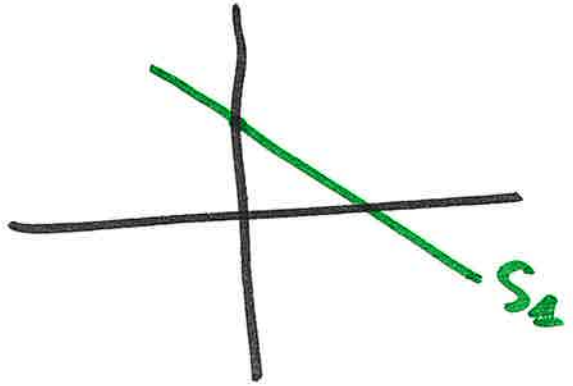
Esempi di spazi e sottospazi.

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$

$\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$.

1) $S_1 = \{(a,b) \mid a+b = 1\}$.

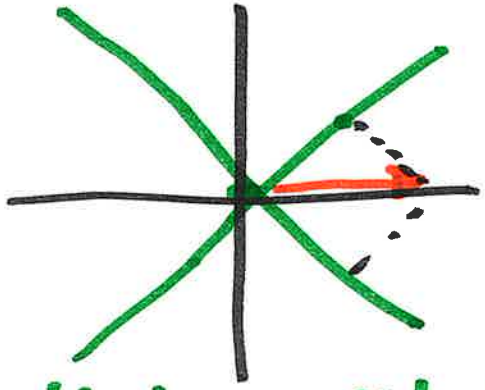


NON è SOTTOSPAZIO!

$\underline{0} \notin S_1$

$(1a) + -1(1b) = \underline{0} \notin S$

2) $S_2 = \{(a,b) \mid |a| = |b|\}$



$\underline{0} \in S_2$

$(1,1) \in S_2$

$(1,-1) \in S_2$

$(a,b) \in S_2 \Rightarrow \alpha(a,b) \in S_2$

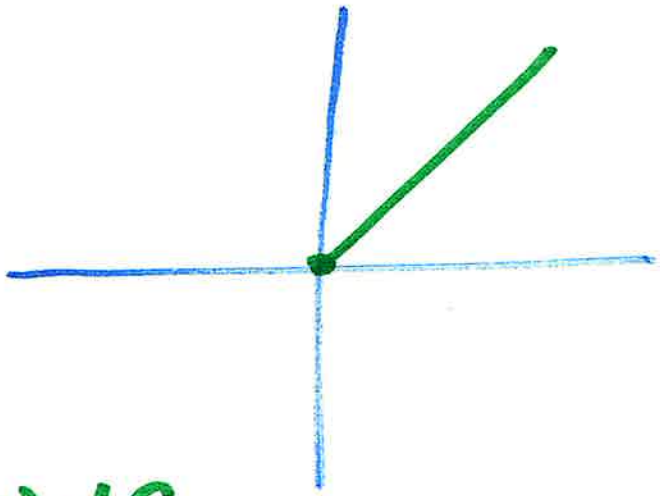
$(\alpha a, \alpha b) \Rightarrow |\alpha a| = |\alpha||a| = |\alpha||b| = |\alpha b|$

No

$(1,1) \in S_2 \quad (1,-1) \in S_2$

$(1,1)+(1,-1)=(2,0) \notin S_2$

3) $S_3 = \{(a,b) \mid a \geq 0, b=a\}$.



$\underline{0} \in S_3$

$\forall\, \bar{v}, \bar{w} \in S_3 \quad \bar{v}+\bar{w} \in S_3$

ma $\quad -1 \cdot (1,1) = (-1,-1) \notin S_3$

NON È SOTTOSPAZIO

$\underline{0} \notin S \Rightarrow S \ntrianglelefteq V$ vero

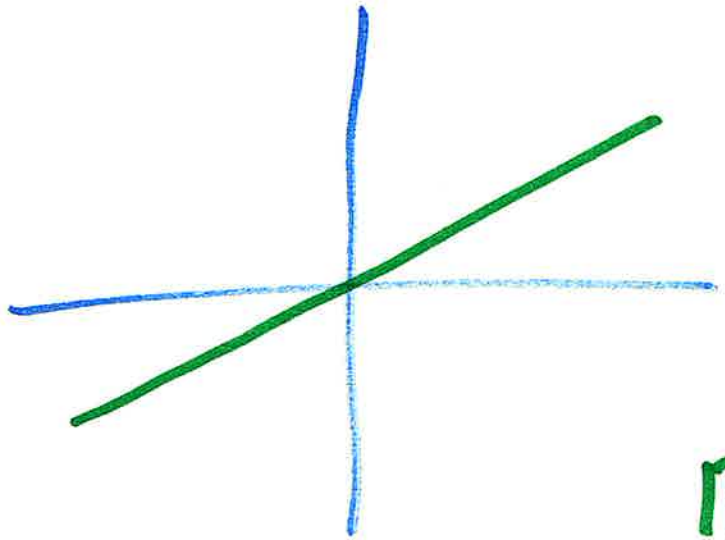
$\underline{0} \in S \Rightarrow S \trianglelefteq V$ può essere falso

(l'implicazione è falsa)

$S_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\}$.

se $(a,b)=(0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_4 = \mathbb{R}^2$ è sott.



$\mathbb{R}^2$

$\{0\}$

anche per $(a,b) \neq (0,0)$
è sempre sottospazio.

siano $\bar{u} = (x_1, y_1) \in S_4$

$\bar{v} = (x_2, y_2)$

$\alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$

$\Rightarrow a(\alpha x_1 + \beta x_2) + b(\alpha y_1 + \beta y_2) =$

$$= (a\alpha x_1 + b\alpha y_1) + (a\beta x_2 + b\beta y_2) =$$

$$= \alpha(ax_1 + by_1) + \beta(ax_2 + by_2) = 0 + 0 = 0$$

$$\alpha(ax_1 + by_1) = 0 \qquad \beta(ax_2 + by_2) = 0$$

✓

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}.$$

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to ax + by \end{cases} \qquad \varphi \text{ è lineare.}$$

$$\ker(\varphi) = \{(x,y) \mid \varphi(x,y) = 0\} =$$

$$= \{(x,y) \mid ax + by = 0\}.$$

$$S_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} 2x+3y=0 \\ 2y-z=0 \end{matrix}\}.$$

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \longrightarrow (2x+3y, 2y-z) \end{cases}$$

$S_5 = \ker \varphi$ $\qquad$ $S_5 \leq \mathbb{R}^3$

$$\ker \varphi = \{(-\tfrac{3}{2}y, y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2y-z=2 \end{cases}$$

$(-1,1,0)$ è soluzione

$(-1,1,0) \in \varphi^{-1}((1,2))$

Tutte le soluzioni sono del tipo

$$(-1,1,0) + \ker \varphi =$$

$$= \left\{ \left(-1-\frac{3}{2}y, 1+y, 2y\right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sp. vettoriali di funzioni.

Siano $V(\mathbb{K})$, $W(\mathbb{K})$ due sp. vettoriali su $\mathbb{K}$

definiamo $\mathrm{Hom}(V,W) := \{f : V \to W \mid f \text{ lineare}\}$.

(omomorfismi).

$\mathrm{Hom}(V,W)$ è sp. vettoriale su $\mathbb{K}$

$$(f+g)(\bar{x}) := f(\bar{x}) + g(\bar{x}) \qquad \forall \bar{x}$$

$$(\alpha f)(\bar{x}) = \alpha f(\bar{x})$$

se f, g lineari $\Rightarrow$ $f+g$ lineare

αf lineare

f, g lineari $\Rightarrow$ $\alpha f + \beta g$ lineare

$\forall \bar{u}, \bar{w} \in V(\mathbb{K})$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$(\alpha f + \beta g)(\lambda \bar{u} + \mu \bar{w}) =$$

$$= \lambda (\alpha f + \beta g)(\bar{u}) + \mu (\alpha f + \beta g)(\bar{w})$$

$$(\alpha f)(\lambda \bar{u} + \mu \bar{w}) + (\beta g)(\lambda \bar{u} + \mu \bar{w}) = \dots$$

□

Def: Siano $U(\mathbb{K})$ e $W(\mathbb{K})$ due sp. vettoriali

Si dice che $U \cong W$ (U isomorfo a W) se esiste un <u>isomorfismo</u> $\varphi : U \to W$ cioè una applicazione lineare invertibile $U \to W$.

In particolare $\ker \varphi = \{0\}$ iniettiva

$\operatorname{Im} \varphi = W$ suriettiva.

$$\mathbb{R}^4 = \{(a_0 a_1 a_2 a_3) \mid a_i \in \mathbb{R}\}.$$

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 3} := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_i \in \mathbb{R}\}.$$

$$\mathbb{R}^{2,2} := \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$(a_0\ a_1\ a_2\ a_3) + (b_0\ b_1\ b_2\ b_3) =$$

$$(a_0+b_0\ \ a_1+b_1\ \ a_2+b_2\ \ a_3+b_3)$$

$$\alpha(a_0\ a_1\ a_2\ a_3) = (\alpha a_0\ \ \alpha a_1\ \ \alpha a_2\ \ \alpha a_3)$$

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) + (b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3) =$$

$$= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 +$$

$$(a_3+b_3)x^3$$

$$\alpha(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \alpha a_3 x^3$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$

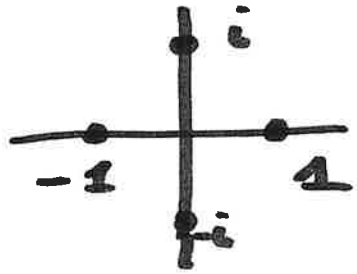
$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \\ (a_0, a_1, a_2, a_3) \longrightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \end{cases}$$

$$\psi \begin{cases} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} \\ (a_0, a_1, a_2, a_3) \longrightarrow \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{C}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{C}^4 \\ \underset{\substack{\| \\ p(x)}}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3} \longrightarrow (a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \mathbb{C}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{C}^4 \\ p(x) \longmapsto (\overset{p(1)}{p(\omega^0)} \ \overset{p(i)}{p(\omega)} \ \overset{p(-1)}{p(\omega^2)} \ \overset{p(-i)}{p(\omega^3)}) \end{cases}$$

ove $\omega = e^{\frac{\pi i}{2}}$