$\mathbb{Z}_4$

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ (e.g.)

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$a \cdot b = c$

$b = a^{-1} c$

Spazio vettoriale su di un campo $\mathbb{K}$.

Esempio "informale"

$S_2 := \{$ vettori liberi del piano euclideo.

↓

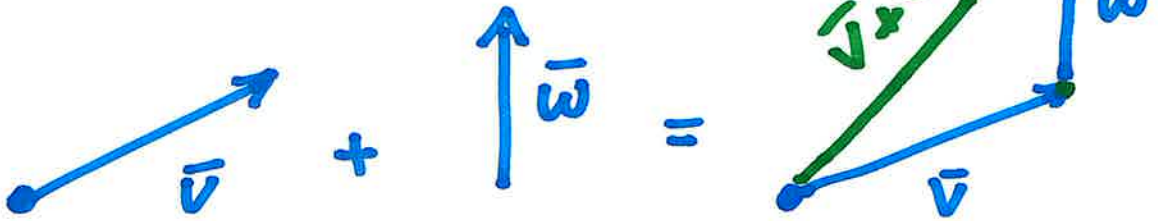
frecce tracciabili nel piano

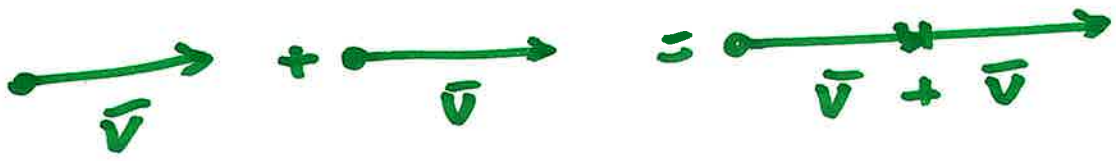
↓

↗ segmento orientato

- direzione
- verso
- lunghezza.

SOMMA DI VETTORI





$\forall \bar{v} \in S_2$

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definisco $n \cdot \bar{v} := \bar{v} + (n-1)\bar{v}$ $n > 1$

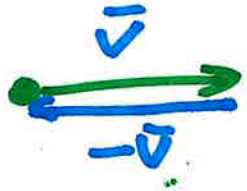
$1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definisco $\frac{1}{n} \cdot \bar{v} := \bar{w}$ con

$n \cdot \bar{w} = \bar{v}$

Definisco $\frac{a}{b} \cdot \bar{v} = a \cdot \left(\frac{1}{b} \bar{v}\right)$ $a, b \neq 0$

$\forall \bar{v} \; \exists (-\bar{v}) \in S$: $\bar{v} + (-\bar{v}) = \underline{0}$



Definisco $(-1) \cdot \bar{v} = (-\bar{v})$ → stessa dir.
stessa lunghezza di $\bar{v}$
verso opposto

$0\,\bar{v} := \underline{0}$

$-\frac{a}{b}\cdot\bar{v} = (-1)\cdot\left(\frac{a}{b}\bar{v}\right)$

Io ho definito una operazione

$$\cdot : \mathbb{Q} \times S_2 \to S_2$$

In particolare se $\ell(\bar{v})$ = lunghezza di $\bar{v}$

$$\Rightarrow \ell\left(\frac{a}{b}\bar{v}\right) = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot \ell(\bar{v})$$

e quindi $\frac{a}{b}\bar{v}$ è un vettore che ha

- medesima direzione di $\bar{v}$
- lunghezza $\left|\frac{a}{b}\right| \ell(\bar{v})$
- verso → uguale a $\bar{v}$ se $\frac{a}{b} > 0$
  opposto a $\bar{v}$ se $\frac{a}{b} < 0$

Su S_2 ci sono 2 operazioni

1) $+ : S_2 \times S_2 \longrightarrow S_2$ somma di vettori

2) $\cdot : \mathbb{Q} \times S_2 \to S_2$ prodotto per scalare

gli elementi di $\mathbb{Q}$ sono detti scalari.

$\frac{1}{2}$ ⟼ = ⟼

$-\frac{1}{2}$ ⟼ = ⟻

$\mathbb{R} \times S_2 \longrightarrow S_2$

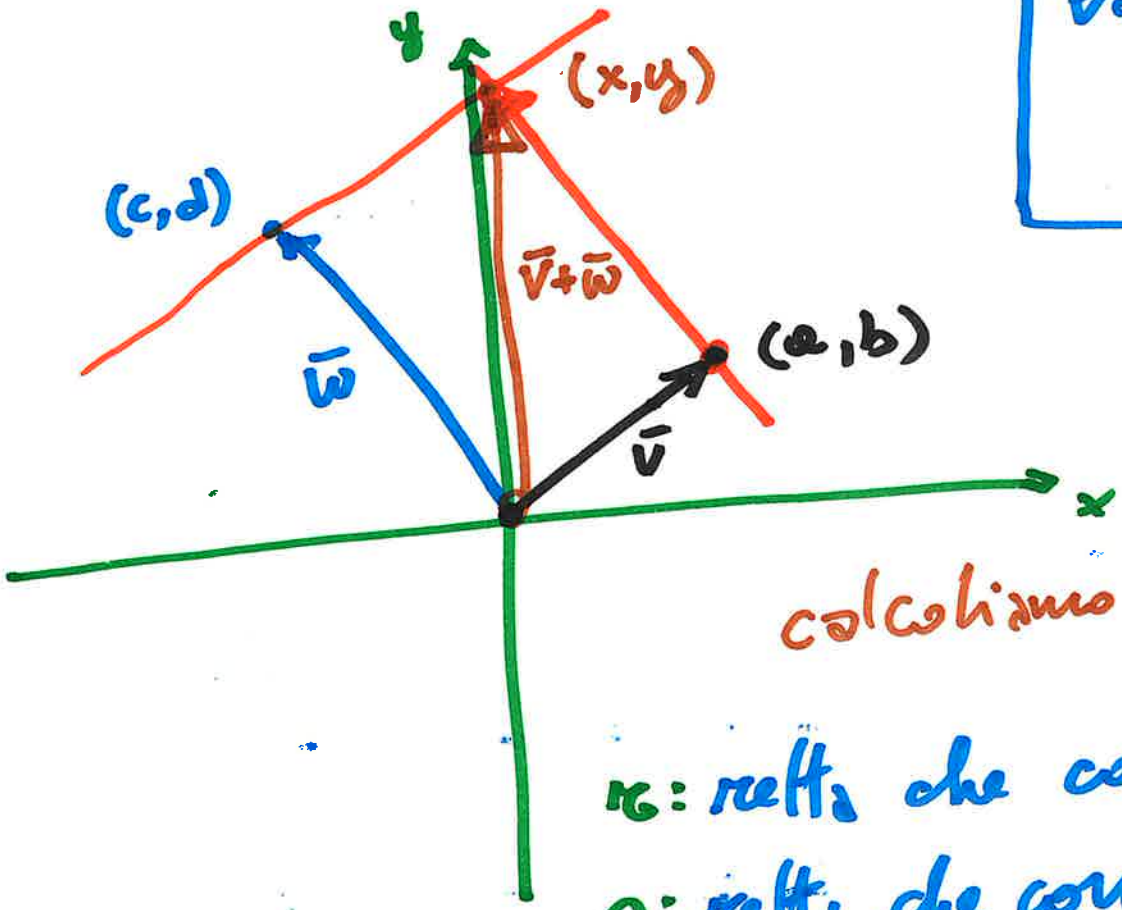
1) $(S_2, +)$ è un gruppo abeliano

2) $\cdot : \mathbb{K} \times S_2 \to S_2$ e soddisfa

$\forall \bar{v} \in S_2 : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v} \in S_2 : (\alpha \cdot \beta)\bar{v} = \alpha \cdot (\beta \bar{v})$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \; \forall \bar{v} \in S_2 : (\alpha + \beta)\bar{v} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{v}$



$\forall a \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in S_2$:
$a(\bar{v}+\bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$.

$(a,b) \neq (0\ 0)$
$(c,d) \neq (0,0)$

calcoliamo $(x,y) = f((a,b),(c,d))$

r: retta che contiene $\bar{v}$: $bx - ay = 0$

s: retta che contiene $\bar{w}$: $dx - cy = 0$

s': retta per $(a,b) \parallel s$ → $d(x-a) - c(y-b) = 0$

r': retta per $(c,d) \parallel r$ → $b(x-c) - a(y-d) = 0$

(x,y) = coordinate di $s \cap r'$

$$\begin{cases} d(x-a)-c(y-b)=0 \\ b(x-c)-a(y-d)=0 \end{cases}$$

$(x,y)=(a+c,b+d)$

$d(a+c-a)-c(b+d-b)=$

$= dc-cd=0$

$b(a+c-c)-a(b+d-d)=ba-ab=0$

$(a,b)+(c,d):=(a+c,b+d)$

$(a,b)+(a,b)=(2a,2b)$ → stessa dir di (a,b) stesso verso lunghezza doppia.

$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$

$(4a^2+4b^2)^{\frac{1}{2}}=2(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$

+ $(a+b)+(c,d) = (a+c, b+d)$

• $\alpha \cdot (a,b) := (\alpha a, \alpha b)$ $\quad \alpha \in \mathbb{K}$.

$(S_2,+)$ gruppo abeliano $\quad \forall (a,b),(c,d) \in S_2$

$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \in S_2$

$(a,b)+(0,0) = (0\,0)+(a,b) = (a,b)$

$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) =$

$= (c,d)+(a,b)$

$[(a,b)+(c,d)]+(e,f) =$ ~~$[(a+c, b+d)]+(e,f)$~~

$[(a+c, b+d)]+(e,f) =$

$= ((a+c)+e, (b+d)+f) =$

$$(a+(c+e), b+(d+f)) =$$

$$= (a,b) + [(c,d)+(e,f)].$$

$$(a,b) + (-a,-b) = (a-a, b-b) = (0\,0).$$

$$1\cdot(a,b) = (1\cdot a, 1\cdot b) = (a,b)$$

$$(\alpha+\beta)\cdot(a,b) = ((\alpha+\beta)a, (\alpha+\beta)b) =$$

$$= (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b) =$$

$$= (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) =$$

$$= \alpha(a,b) + \beta(a,b).$$

$$(\alpha\cdot\beta)(a,b) = ((\alpha\beta)a, (\alpha\beta)b) =$$

$$= (\alpha(\beta a), \alpha(\beta b)) =$$

$$= \alpha(\beta a, \beta b) = \alpha[\beta(a,b)]$$

$$\alpha[(a,b)+(c,d)] = \alpha(a+c, b+d) =$$

$$= (\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) =$$

$$= \alpha(a,b) + \alpha(c,d)$$

□

Def: Sia $\mathbb{K}$ un campo e $(V,+)$ un gruppo abeliano.

Si dice <u>spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$</u> e si scrive $V(\mathbb{K})$ la struttura algebrica data dalle seguenti 2 operazioni

$+ : V \times V \longrightarrow V$ somma di vettori

$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ prodotto per scalare

1) $(V,+)$ è gruppo abeliano

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$:

   a) $1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$ → unitarietà

   b) $(\alpha\beta)\cdot \bar{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{v})$ → pseudo associativa

c) $(\alpha+\beta)\cdot\bar{v} = \alpha\cdot\bar{v} + \beta\cdot\bar{v}$

d) $\alpha(\bar{u}+\bar{v}) = \alpha\cdot\bar{u} + \alpha\bar{v}$.

] pseudo-distributive

N.B In $(\alpha+\beta)\cdot\bar{v} = \alpha\cdot\bar{v} + \beta\cdot\bar{v}$

il "+" a sx è somma in $\mathbb{K}$ (di scalari)

il "+" a dx è somma in V (di vettori).

Gli elementi di $\mathbb{K}$ sono detti scalari

di V sono detti vettori

⚠ $\alpha+\bar{v}$ NON HA SENSO $\alpha\in\mathbb{K}$, $\bar{v}\in V$

$\bar{v}\cdot\bar{w}$ NON È UNA OPERAZIONE FRA VETTORI

Esempio 1: $(S_2, +)$ su $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Esempio 2: $(\mathbb{R}^2, +)$ o più in generale

$(\mathbb{K}^2, +)$ su $\mathbb{K}$ con

$$+ : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$$
$$((a,b),(c,d)) \longrightarrow (a+c, b+d)$$

- $$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$$
$$\alpha, (a,b) \longrightarrow (\alpha a, \alpha b).$$

Def: Sia X un insieme. Si dice <u>n-upla</u> di elementi di X una funzione

$$(x_1 \dots x_n) : \{1 \dots n\} \longrightarrow X$$

[Lista ordinata con ripetizioni di elementi di X]

$(x_1 \dots x_n)(i) := x_i$

$(1,2,3) : \{1,2,3\} \to \mathbb{N}_0$

$(2\,3\,1)$

$(2\,2\,7)$

$(1\,2\,3)(1) = 1$

$(2\,3\,1)(1) = 2 \quad (2\,3\,1)(2) = 3$

$(2\,2\,7)(1) = 2$

$(2\,2\,7)(2) = 2$

$(a,b,c) \neq (a,c,b)$

$(a,a,b) \neq (a\ b)$

$(1,2)$

$(a,b) \neq (b,a)$

$\neq (a,a)$

$X^n := \{ (x_1 \dots x_n) : \{1 \dots n\} \to X \mid x_i \in X \}$

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

OSS: $\mathbb{K}^2$ è uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}^2$ è identificato con $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$

ES. FONDAMENTALE

$$\mathbb{K}^n = \{(a_1, a_2 \dots a_n) \mid \forall\, a_i \in \mathbb{K}\}$$

è uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$.

$+$: $(a_1\, a_2 \dots a_n) + (b_1\, b_2 \dots b_n) =$

$= (a_1+b_1\ a_2+b_2 \dots a_n+b_n)$

$\cdot$: $\alpha \cdot (a_1 \dots a_n) = (\alpha a_1\ \alpha a_2 \dots \alpha a_n)$