$f : A \to B$ $\quad$ $f \subseteq A \times B$

A dominio

B codominio

$\forall a \in A \; \exists! b \in B : (a,b) \in f \quad f(a) = b$

$B^A := \{ f \subseteq A \times B \mid f : A \to B \text{ funzione} \}.$

$2^A := \{ f \subseteq A \times \{0,1\} \mid f : A \to \{0,1\} \text{ funzione} \}.$

corrisponde all'insieme delle parti di A

$\{ X : X \subseteq A \}.$

$A = \{a, b, c\}$.

$\emptyset$

$\{a\}, \{b\}, \{c\}$.

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

$\{a, b, c\}$.

a	b	c	
0	0	0	$\to \emptyset$
1	0	0	$\to \{a\}$
0	1	0	$\to \{b\}$.
0	0	1	$\to \{c\}$.
1	1	0	$\to \{a, b\}$.
1	0	1	$\to \{a, c\}$.
0	1	1	$\to \{b, c\}$.
1	1	1	$\to \{a, b, c\}$.

Sia $X \subseteq A$ definiamo

$$\chi_X : \begin{cases} A \to \{0,1\}. \\ y \to \begin{cases} 0 \text{ se } y \notin X \\ 1 \text{ se } y \in X \end{cases} \end{cases}$$

funzione caratteristica di X

•	0	1
0	0	0
1	0	1

$$\chi_{X \cap Y}(a) = \chi_X(a) \cdot \chi_Y(a) \quad \forall a \in A$$

+ somma in $\mathbb{N}$

$$\chi_x(a) + \chi_y(a) =$$

$\{a, b\}$ $\{a, c\}$.

$$(\chi_x + \chi_y)(w) = \begin{cases} 1 \text{ se } w = c \\ 1 \text{ se } w = b \\ 2 \text{ se } w = a \end{cases}$$

$$(\chi_x + \chi_y)(w) \neq 0 \iff x \in X \cup Y$$

Sia X un insieme. Si dice multiinsieme o sistema di X ogni funzione $f : X \to \mathbb{N}_0$

↳ numeri naturali incluso 0.

multi-insieme: insieme con possibili elementi ripetuti.

→ AD OGNI ELEMENTO SI ASSOCIA UNA MOLTEPLICITÀ ≥ 0

→ Def. dato un multi-insieme $\tilde{X}$ che è una funzione $f: X \to \mathbb{N}_0$

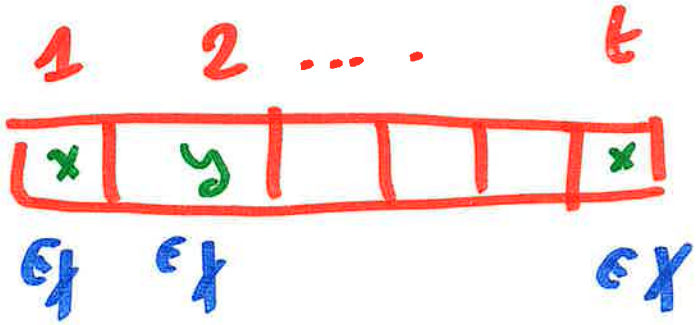
si dice supporto di $\tilde{X}$ l'insieme

$$\mathrm{Supp}(\tilde{X}) := \{ x \in X \mid f(x) > 0 \}.$$

sequenza ordinata / lista di t elementi di X

è una funzione $\gamma: \{1, 2, \dots t\} \to X$

$\subseteq \mathbb{N}_0$



$\sigma(1)$
$\sigma(2)$
$\vdots$
$\sigma(t)$.

(a, a, a)

$\sigma : \{1,2,3\} \to \{a,b,c,d\}$

$\sigma(1) = a$
$\sigma(2) = a$
$\sigma(3) = a \to (a\ a\ a)$

$\sigma : \{1,2,3\} \to \{a,b,c,d\}$.

$\sigma(1) = a$
$\sigma(2) = b \to (a\ b\ a)$
$\sigma(3) = a$

$\sigma(1) = a$
$\sigma(2) = a \to (a\ a\ b)$.
$\sigma(3) = b$

$\{1,2\} \to X$

$(a,b) \in X \times X$

coppia ordinata

↓

$\{a, \{a,b\}\}$.

(a,b) $\quad a,b \in X$

lista di 2 elementi.

↓

funzione

$(a,b) \subseteq \{1,2\} \times X$

$\{\{1, \{1,a\}\}, \{2, \{2,b\}\}\}$

(a,b) lista di 2 elementi

"=" coppia ordinata.

$X^n :=$ insieme di tutte le sequenze/liste di elementi di X di lunghezza n

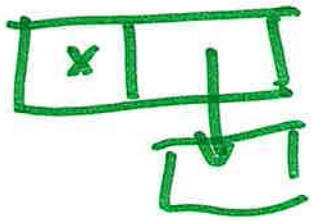
$$X^n := \{ f : \{1 \dots n\} \to X \mid f \text{ funzione} \}.$$

Identifico X^n con $(X^{n-1}) \times X$ per $n \geq 2$

$$X^2 \approx X \times X$$

$$X^3 \approx (X \times X) \times X = \{((a,b),c) : (a,b) \in X \times X, c \in X\}.$$

$$X \times (X \times X) = \{(a,(b,c)) : a \in X, (b,c) \in X \times X\}.$$



$f : A \to B$

$g : B \to C$

possiamo sempre comporle a patto che il codominio della prima coincida col dominio della seconda

$$(g \circ f) := \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a,b) \in f, (b,c) \in g\}.$$

$$(g \circ f)(a) = g(b) \quad \text{ove} \quad b = f(a)$$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$$\text{Im } f := \{b \in B : \exists a \in A : f(a) = b\} =$$

$$= \{b \in B : \exists (a,b) \in f\}.$$

ci basterebbe

dominio di $g = B'$

con $\mathrm{Im}(f) \subseteq B'$.

Definiamo restrizione

e troncamento di f.

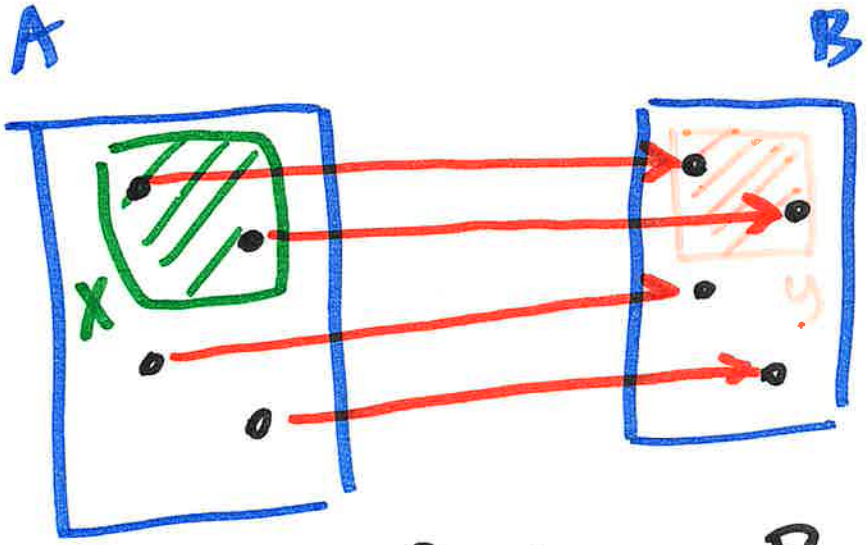
$$f: A \to B.$$

$X \subseteq A$: $f_{|X} : \begin{cases} X \to B \\ x \to f(x) \end{cases}$ f ristretta ad X

$Y \supseteq \mathrm{Im}(f)$ $f^{|Y} : \begin{cases} A \to Y \\ x \to f(x) \end{cases}$ f troncata ad Y.

$f|^{y}_{x}$ = f ristretta ad X e troncata ad y

con $y \supseteq Im(f|_X)$



prima si restringe
poi si tronca

$f: A \to B$

$g: C \to D$

$Im(f) \subseteq C$

$$f_{|_{Im(f)}} : A \to Im(f)$$

$$g^{|Im(f)} : Im(f) \to D$$

$$\left(g^{|Im(f)} \circ f_{|_{Im(f)}} \right)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

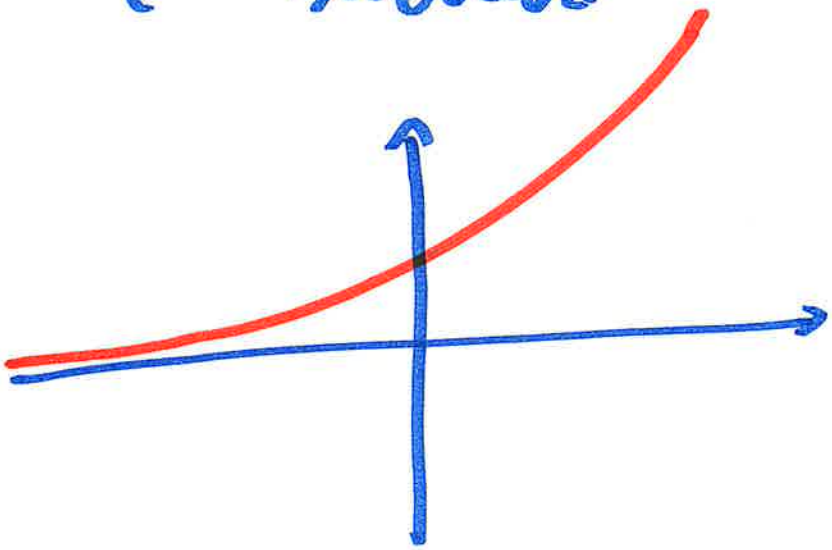
<u>oss:</u> $f^{|Im(f)}$ è sempre suriettiva

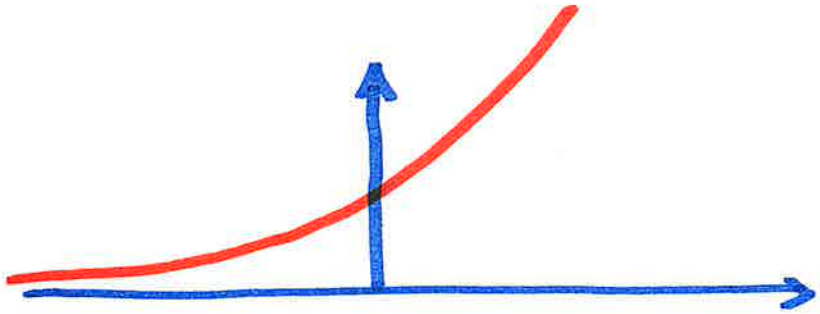
exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva ma non suriettiva.

$exp|^{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R} \to$

$\exp^{]0,+\infty[} : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$

è biettiva





funzioni inverse.

$f: A \to B$ e f biiettiva

$\Rightarrow \exists f^{-1} = f^{-1}$ è una funzione biiettiva.

$$\iota_A : \begin{cases} A \to A \\ a \to a \end{cases}$$

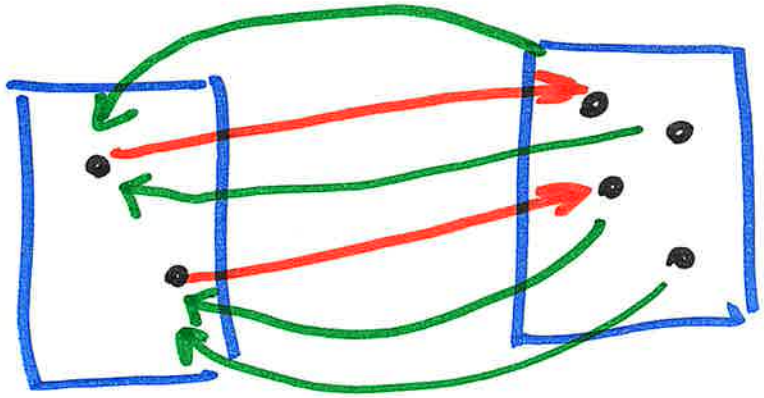
$$\iota_B : \begin{cases} B \to B \\ b \to b \end{cases}$$

$$(f^{-1} \circ f) : \begin{cases} A \to A \\ a \to a \end{cases} = \iota_A$$

$$(f \circ f^{-1}) : \begin{cases} B \to B \\ b \to b \end{cases} = \iota_B$$

funzioni identiche.

$f: A \to B$ iniettiva.



$f^{|Im(f)}$ è biiettiva.

Inversa a sinistra di $f \to \tilde{g}: Im(f) \to A$

$\tilde{g} = (f^{|Im(f)})^{-1}$

$\tilde{g} \circ f^{|Im(f)}(a) = a \quad \forall a$

Definiamo $g: \begin{cases} B \to A \\ b \longrightarrow \begin{cases} \tilde{g}(b) & \text{se } b \in Im(f) \\ a & \text{se } b \notin Im(f) \end{cases} \end{cases}$

con a elemento arbitrario di A.

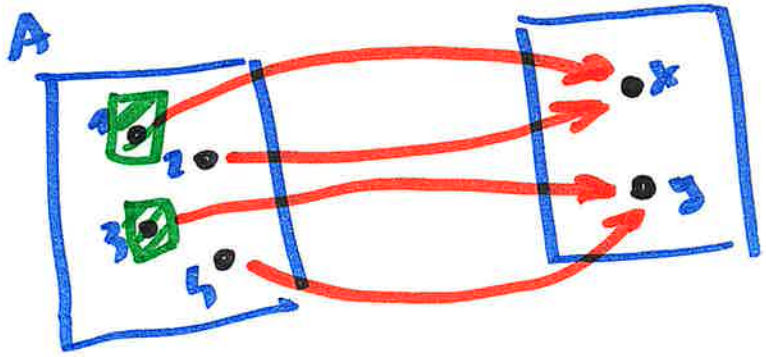
$$(g \circ f) = 1_A$$

<u>oss</u>: di inverse a dx di f ne esistono tante.

se f non è suriettiva non $\exists\, h$ tale che

$$(f \circ h) = 1_B$$

f suriettiva



se non iniettiva non $\exists\, h$ tale che

$$(h \circ f) = 1_A$$

$f : A \to B$ suriettiva

$\Rightarrow \exists\, X \subseteq A$ tale che $f_{|X} : X \to B$ è

biiettiva.

Sia $T = \{ \{ \underset{\in f}{(a,b)} \mid a \in A \}, b \in B \}$. =

~~= insieme di tutte le coppie (a,b)~~

~~$T = \{ [b] := \{ (a,b)$~~

$$T = \{ [b] := \{ (a,b) \in f \mid a \in A \} \mid b \in B \}.$$

$$\approx \{ [b] := \{ a \in A \mid f(a) = b \} \mid b \in B \}.$$

↓

insieme delle preimmagini di b.

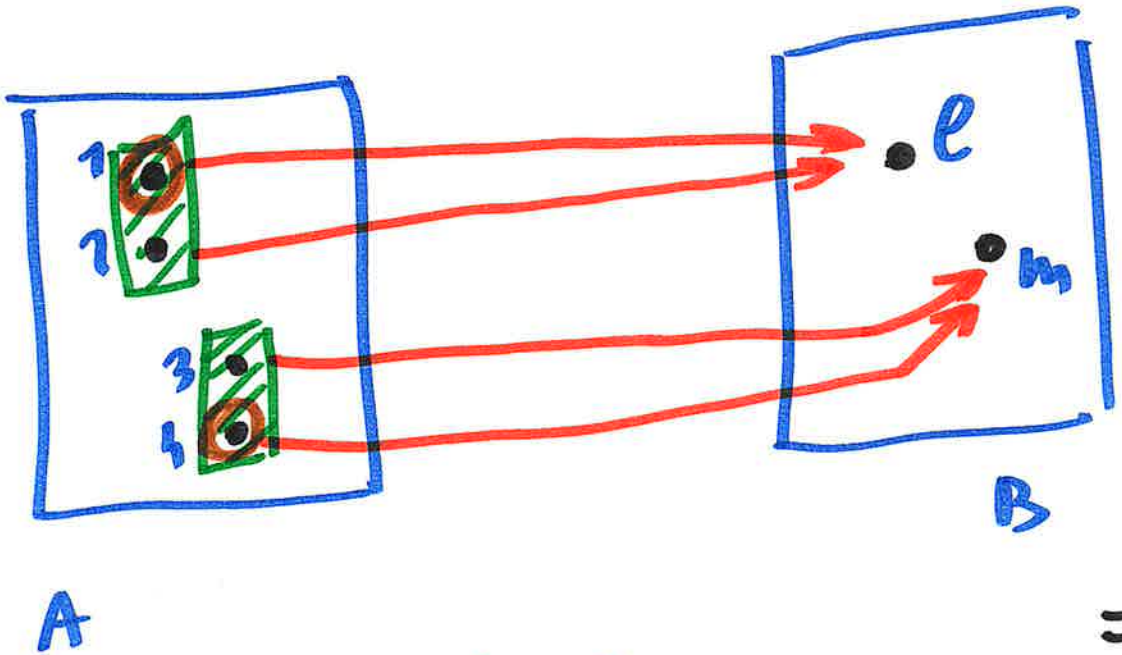
oss 1) $[b] \cap [c] = \emptyset \quad \forall\, b, c \in B \;\; b \neq c.$

Se $\exists x \in [b] \cap [c] \Rightarrow f(x) = b = f(x) = c \Rightarrow b = c$

2) $\bigcup_{b \in B} [b] = A$

per ogni "classe" $[b]$ scegliamo un $a_b \in A$ e poi

$$D = \{ a_b \mid b \in B \}.$$



$$D = \{1, 4\} \subseteq A$$

$f_{|D} : D \to B$

è suriettiva

è iniettiva.

$\Rightarrow$ è biiettiva

$\Rightarrow \exists (f_{|D})^{-1} = \tilde{h}$

$\tilde{h} : B \to D$

Fatto

$$(f_{|D} \circ \tilde{h})(x) = f_{|D}(\tilde{h}(x)) = x$$

$$(f_{|D} \circ \tilde{h}) = \iota_B$$

oss: il dominio di $f_{|D}$ è contenuto in

A = dominio di f $\Rightarrow$

$$f_{|D}(d) = f(d) \quad \forall d.$$

e visto che l'immagine di h è D

abbiamo $(f_{|D} \circ \hat{h}) = (f \circ \tilde{h}) = \iota_B$

$\tilde{h}$ è una <u>inversa a destra</u> di f

⚠ Inverse a dx e sx in generale non sono uniche

Quando esistono entrambe $\Rightarrow$ f è invertibile

e f^{-1} è l'unica inversa di f a dx

e l'unica inversa di f a sx

→ <u>INVERSA</u>

$f(x) = a$ $\qquad$ $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(a)$

$x = f^{-1}(a)$