$$U \cap V := \{ u \in U \mid u \in V \}.$$

$$U \cup V := \{ x \mid x \in U \text{ oppure } x \in V \}.$$

$$U \setminus V := \{ x \in U \mid x \notin V \}.$$

$$U = V \iff [\forall x : x \in U \iff x \in V]$$

$$\Updownarrow$$

$$U \subseteq V \;\&\; V \subseteq U$$

$$U \subseteq V \iff \forall u \in U : u \in V$$

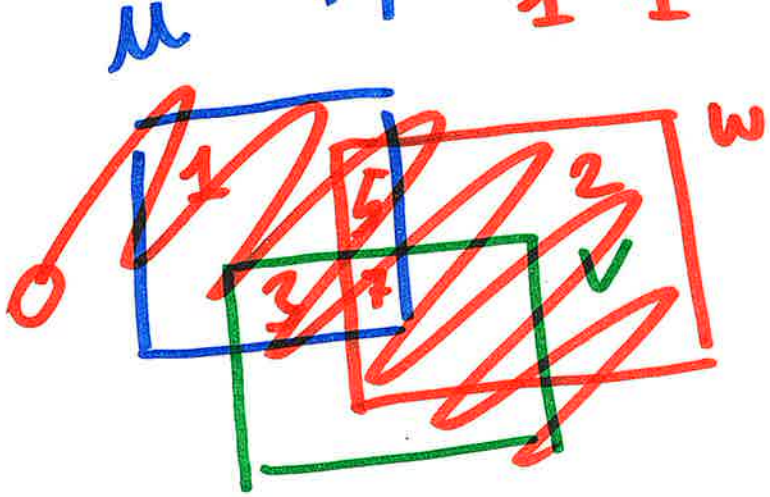
$$U \subsetneq V \iff U \subseteq V \;\&\; U \neq V$$

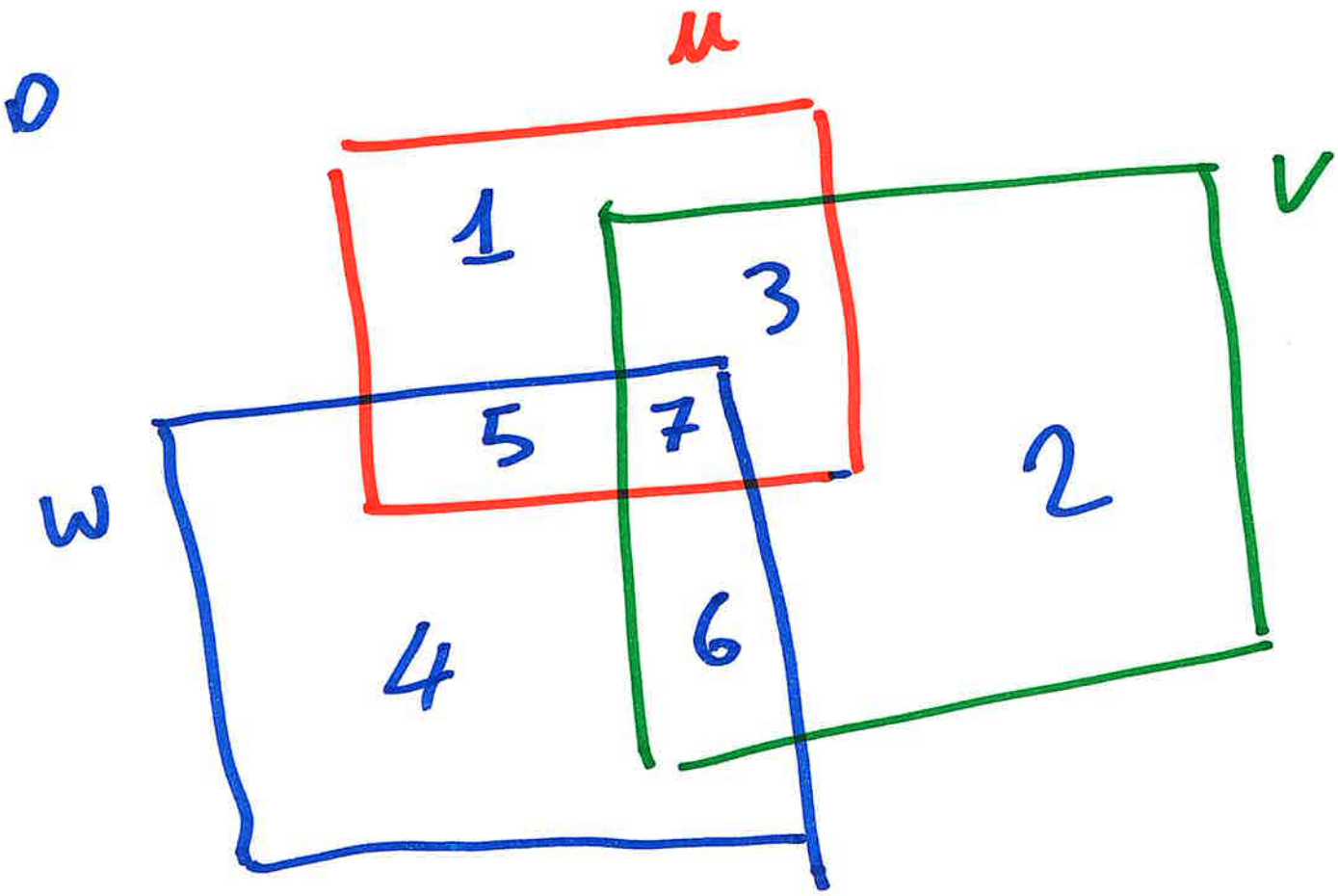
$$U \subset V$$

$$U \cap (V \cup W) = (U \cap V) \cup (U \cap W)$$

$$U \cup (V \cap W) = (U \cup V) \cap (U \cup W)$$

x	$x \in U$	$x \in V$	$x \in W$	$U \cap (V \cup W)$	$(U \cap V) \cup (U \cap W)$
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	0
3	1	1	0	1	1
5	1	0	1	1	1
6	0	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1




u
v
w
1
3
5
7
2
4
6

$(a,b) \neq (b,a)$

$c \notin \{a,b\} \Rightarrow c \notin (a,b)$

(a,a)

$(a,b) := \{a, \{a,b\}\}$.

$a \neq b \Rightarrow a \in \{a, \{a,b\}\}$. ma $b \notin \{a, \{a,b\}\}$.

elementi di (a,b) $:= \{a,b\}$.

in particolare x "$\in$" $(a,b) \iff x \in \{a,b\}$.

ove in una coppia $(a,b) = \{x, y\}$.

l'insieme degli el. soggiacenti è quello per cui vale $x \in y$ perché è vero che

o $x \in y$ o $y \in x$ ma mai entrambi.

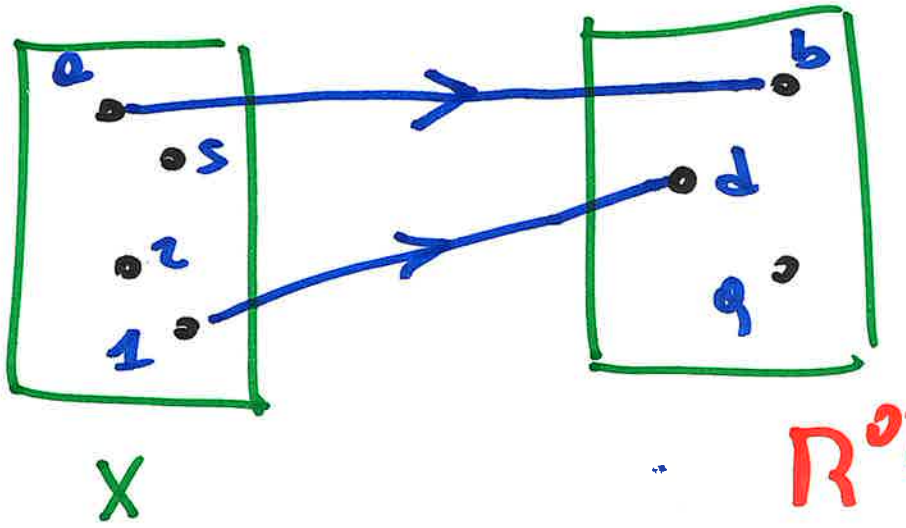
Siano X, Y due insiemi

$$X \times Y := \{(a,b) \mid a \in X, b \in Y\}.$$

prodotto cartesiano.

→ Relazione fra 2 insiemi. X ed Y

$R \subseteq X \times Y$ $\quad R^{opp} \subseteq Y \times X$ tale che



$$R^{opp} := \{(b,a) \mid (a,b) \in R\} \in Y \times X.$$

Relazione fra Y ed X

R^{opp} = R opposta

$R \subseteq X \times Y$ diciamo X = dominio di R

Y = codominio di R

- R è detta **ovunque definita** se $\forall x \in X \; \exists_{\geq 1} \; y \in Y$ con $(x,y) \in R$ — da ogni el. di X parte almeno una freccia

  esiste almeno un

- R è detta **funzionale** se $\forall x \in X \; \exists_{\leq 1} \; y \in Y$ con $(x,y) \in R$. — da ogni el. di X parte al più una freccia

  esiste al più

- R è detta **funzione** se $\forall x \in X \; \exists! \; y \in Y$ con $(x,y) \in R$. — da ogni el. di X parte esattamente una freccia.

Dominio di $f(x) = \frac{1}{x}$ $0 \notin$ Dominio.

$\sqrt{x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

~~$\sqrt{4} = \pm 2$~~ No

Funzione: si richiedono condizioni sul dominio

$$f: X \to Y$$

$$f \subseteq X \times Y$$

$\forall x \in X \; \exists! y \in Y : (x,y) \in f$ e scriveremo questo y come $y = f(x)$.

$\forall$ per ogni

$\exists!$ esiste uno ed uno solo

N.B. funzioni con lo stesso dominio e la stessa immagine ma codominio differente sono diverse!

$$\mathrm{Im}(f) := \{y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y\} = f(X)$$

Immagine di f

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\\ x \to \sqrt{x}\end{cases} \qquad g:\begin{cases}\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+\\ x \longrightarrow \sqrt{x}\end{cases}$$

sono funzioni diverse!

$$\mathrm{Im}(f) := \{ y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y \}.$$

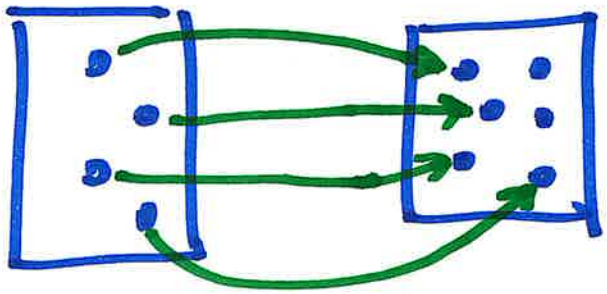
se $A \subseteq X$ scriveró $f(A) := \{ y \in Y \mid \exists a \in A : f(a) = y \}$.

Sia X un insieme

$$i_X : \begin{cases} X \to X \\ x \to x \end{cases} \qquad \iota_X = \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$$

è detta funzione identica su X

$f : X \to Y$ è detta
- iniettiva se $\forall y \in Y \; \exists_{\leq 1} x \in X$ con $f(x) = y$
- $\Leftrightarrow f^{opp}$ è funzionale.



- suriettiva se

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$$

- iniettiva se

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva

$$\Leftrightarrow \forall y \in Y \; \exists! x \in X : f(x) = y$$

Si definisce funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ la funzione che associa a ogni $y \in Y$ l'unico $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

la funzione $f^{-1} := f^{opp}$

funzione inversa di f.

- Se $\exists\, f: X \to Y$ tale che f è iniettiva
  diremo $|X| \leq |Y|$ cardinalità di $X \leq$ cardinalità di Y

$\exists\, f: X \to Y$ tale che f è suriettiva
diremo $|X| \geq |Y|$ $\geq$

$\exists\, f: X \to Y$ tale che f è biiettiva
diremo $|X| = |Y|$ cardinalità di X = cardinalità di Y.

Def: $|X|$ è **infinita** se

$\exists f: X \to Y$ biiettiva con $Y \subsetneq X$.

$\mathbb{Z}$

insieme numeri interi

$2\mathbb{Z} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

insieme dei numeri pari.

$1 \notin 2\mathbb{Z} \Rightarrow 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$

$$f: \begin{cases} \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z} \\ x \to 2x \end{cases}$$

f è biiettiva.

Sia $a \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : a = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow a = f(x) \Rightarrow a \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow$ suriettiva.

Supponiamo

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$$

$\Rightarrow f$ iniettiva. $\square$

fra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ esiste una biiezione.

$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\frac{a}{b} \longmapsto 2^a \cdot 3^b$

non esiste una biiezione $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}|$

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

$f: X \to Y$ una funzione

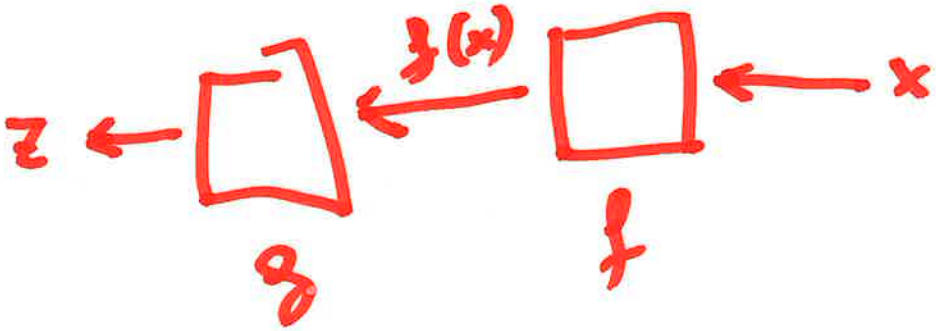
$g: Y \to Z$ una funzione

codominio di f = dominio di g

$(g \circ f): X \to Z$ funzione

$\{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \text{ e } (x,y) \in f, (y,z) \in g\}$.

$y = f(x)$ $\quad z = g(y) \Rightarrow z = g(f(x))$



$f(x)$ $(x)f$

proprietà associativa di $\circ$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

ove $f: X \to Y$ $h: Z \to T$

$g: Y \to Z$

Sia $B^A := \{f : A \to B \mid f \text{ funzione}\}$.

oss: se $|B| = m$ e $|A| = n \Rightarrow$

$\Rightarrow |B^A| = m^n$

$\circ : B^A \times C^B \to C^A$

la composizione di funzioni è una funzione che prende una f.ne $A \to B$ e una f.ne $B \to C$ e dà una f.ne $A \to C$.