

Algebra e Geometria

Sesto Appello - 07/09/2026

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado al più 3. Si consideri la funzione $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\phi(f(x)) := (f(0), \frac{1}{2}(f(-1) + f(1)))$. Determinare se ϕ è lineare; in caso negativo, spiegare perché. In caso positivo, fissate ed indicate opportunamente delle basi del dominio e del codominio, se ne scriva la matrice rappresentativa e se ne determinino nullità e rango.

- B) Si determini se la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 26 & -20 \\ 0 & 0 & 24 & -18 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$. Nel caso se ne determini una matrice simile diagonale e la corrispondente matrice diagonalizzante; in caso contrario si trovino gli autovalori e gli autospazi.

- C) Si scriva un sistema lineare che abbia insieme di soluzioni $\mathcal{S} := (1, 0, -1, 0) + \mathcal{L}((1, 0, -1, 1), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 0, 1))$.

- D) Fissata opportunamente una base ortonormale $\mathfrak{B}$ si scriva tale base e la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sul sottospazio di equazioni $x - y + z = 0 = 2x + z$.

- E) In $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ si determinino due rette sghembe r ed s tali che la loro retta di minima distanza sia $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$.

- F) Si studi, al variare del parametro reale k la dimensione dello spazio vettoriale $\mathcal{L}(S)$ ove S è l'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} -2x + ky + (k+1)t = k-2 \\ (k+2)x - 4y + (k-2)z - 6t = 0 \end{cases}$.

- G) In $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ si determini, se esistono, per quali valori del parametro reale k la conica $\mathcal{C}_k : 2x^2 + 2(k+2)xy + (k+3)y^2 + 2y = 0$ ammette come asse la retta $3x + 3y + 1 = 0$.



Algebra e Geometria

Sesto Appello - 07/09/2026

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado al più 3. Si consideri la funzione $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\phi(f(x)) := (f(0) - f(-1), 2f(2))$. Determinare se ϕ è lineare; in caso negativo, spiegare perché. In caso positivo, fissate ed indicate opportunamente delle basi del dominio e del codominio, se ne scriva la matrice rappresentativa e se ne determinino nullità e rango.

- B) Si determini se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & -10 \\ 0 & 6 & 3 & -10 \\ 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$. Nel caso se ne determini una matrice simile diagonale e la corrispondente matrice diagonalizzante; in caso contrario si trovino gli autovalori e gli autospazi.

- C) Si scriva un sistema lineare che abbia insieme di soluzioni $\mathcal{S} := (1, 0, 0, 1) + \mathcal{L}((1, 1, 0, 1), (0, -1, 0, 1))$.

- D) Fissata opportunamente una base ortonormale $\mathfrak{B}$ si scriva tale base e la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sul sottospazio di equazioni $x + y + z = 0 = 2x - 2z$.

- E) In $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ si determinino due rette sghembe r ed s tali che la loro retta di minima distanza sia $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

- F) Si studi, al variare del parametro reale k la dimensione dello spazio vettoriale $\mathcal{L}(S)$ ove S è l'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} -2x + (k-1)y + (k-2)t = 0 \\ kx - 6y + (k-4)z - 4t = k-4 \end{cases}$.

- G) In $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ si determini, se esistono, per quali valori del parametro reale k la conica $\mathcal{C}_k : 2x^2 + 2(k-2)xy + (k-1)y^2 + 2y = 0$ ammette come asse la retta $3x + 3y + 1 = 0$.



Algebra e Geometria

Sesto Appello - 07/09/2026

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Sia $\mathbb{R}[x]_{<3}$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore di 3. Si consideri la funzione $\phi : \mathbb{R}[x]_{<3} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\phi(f(x)) := (f(0), 2f(1), 3f(-1))$. Determinare se ϕ è lineare; in caso negativo, spiegare perché. In caso positivo, fissate ed indicate opportunamente delle basi del dominio e del codominio, se ne scriva la matrice rappresentativa e se ne determinino nullità e rango.

- B) Si determini se la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 24 & -32 & 20 \\ 0 & 24 & -24 & 10 \\ 0 & 6 & 12 & -19 \\ 0 & 0 & 16 & -20 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$. Nel caso se ne determini una matrice simile diagonale e la corrispondente matrice diagonalizzante; in caso contrario si trovino gli autovalori e gli autospazi.

- C) Si scriva un sistema lineare che abbia insieme di soluzioni $\mathcal{S} := (1, 0, 1, 0) + \mathcal{L}((1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0))$.

- D) Fissata opportunamente una base ortonormale $\mathfrak{B}$ si scriva tale base e la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sul sottospazio di equazioni $y + z = 0 = x - 2z$.

- E) In $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ si determinino due rette sghembe r ed s tali che la loro retta di minima distanza sia $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$.

- F) Si studi, al variare del parametro reale k la dimensione dello spazio vettoriale $\mathcal{L}(S)$ ove S è l'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} (k-1)x - 2y + kt = k-3 \\ -4x + (k+1)y + (k-3)z - 6t = 0 \end{cases}$.

- G) In $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ si determini, se esistono, per quali valori del parametro reale k la conica $\mathcal{C}_k : 2x^2 + 2(k-3)xy + (k-2)y^2 + 2y = 0$ ammette come asse la retta $3x + 3y + 1 = 0$.



Algebra e Geometria

Sesto Appello - 07/09/2026

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Sia $\mathbb{R}[x]_{<3}$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore di 3. Si consideri la funzione $\phi : \mathbb{R}[x]_{<3} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\phi(f(x)) := (f(0), 3f(1) - f(2))$. Determinare se ϕ è lineare; in caso negativo, spiegare perché. In caso positivo, fissate ed indicate opportunamente delle basi del dominio e del codominio, se ne scriva la matrice rappresentativa e se ne determinino nullità e rango.

- B) Si determini se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -6 & -6 & -10 \\ 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$. Nel caso se ne determini una matrice simile diagonale e la corrispondente matrice diagonalizzante; in caso contrario si trovino gli autovalori e gli autospazi.

- C) Si scriva un sistema lineare che abbia insieme di soluzioni $\mathcal{S} := (1, 1, 1, 2) + \mathcal{L}((1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1))$.

- D) Fissata opportunamente una base ortonormale $\mathfrak{B}$ si scriva tale base e la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sul sottospazio di equazioni $x + y + 2z = 0 = x - 2y - z$.

- E) In $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ si determinino due rette sghembe r ed s tali che la loro retta di minima distanza sia $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$.

- F) Si studi, al variare del parametro reale k la dimensione dello spazio vettoriale $\mathcal{L}(S)$ ove S è l'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} (k-3)y - 2z + (k-2)t = k-5 \\ (k-5)x - 4y + (k-1)z - 6t = 0 \end{cases}$.

- G) In $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ si determini, se esistono, per quali valori del parametro reale k la conica $\mathcal{C}_k : 2x^2 + 2(k+3)xy + (k+4)y^2 + 2y = 0$ ammette come asse la retta $3x + 3y + 1 = 0$.