

Algebra e Geometria

Secondo Appello - 02/02/2026

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Si determini, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la posizione reciproca in $AG_3(\mathbb{R})$ delle due rette $r : \begin{cases} 2x + 3y + 5z = k \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

ed $s : \begin{cases} kx + 3y + 5z = 0 \\ (k + 3)x + y = k \end{cases}$.

- B) In $\mathcal{V} := \{f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] : \deg(f) \leq 2\}$, sia $U_k := \{f(x, y) \in \mathcal{V} : f(x, x + k) = 0\}$. Si determinini, al variare di k un complemento *diretto* W_k di U_k in $\mathcal{V}$.

- C) Si determini una matrice ortogonalmente diagonalizzante la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^4$ sul sottospazio di equazione $x - y + z - t = 0$.

- D) Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (2, 3, 5, 0)$ appartiene alla immagine Π della applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ data da $f_k(x, y, z) = (x + y, 2x + ky, 4x + z, x + 2ky - z)$. Posto $k = 0$, quanto vale $d(v, \Pi)$?

- E) Si dica per quali valori del parametro reale k il sottospazio $V = \langle (2, 3, 0), (3, k + 1, k) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ contiene almeno un

autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- F) In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare $\mathbf{x} \star \mathbf{y} := x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 2x_3 y_3$ si determini un complemento ortogonale dello spazio vettoriale $W := \mathcal{L}((0, 0, 1), (1, 1, 1))$.

- G) Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ (se esistono) la conica $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 - 4kxy + y^2 + 2ky + 1 = 0$ è riducibile ed in tale caso se ne determinino le rette componenti ed i loro punti di intersezione.



Algebra e Geometria

Secondo Appello - 02/02/2026

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Si determini, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la posizione reciproca e le eventuali intersezioni in $AG_3(\mathbb{R})$ delle due rette

$$r: \begin{cases} 5x + 3y + kz = k \\ y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{ed } s: \begin{cases} 5x + 3y + kz = 0 \\ (k+3)x + y = k \end{cases}.$$

- B) In $\mathcal{V} := \{f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] : \deg(f) \leq 2\}$, sia $U_k := \{f(x, y) \in \mathcal{V} : f(y + 2k, y) = 0\}$. Si determinini, al variare di k un complemento *diretto* W_k di U_k in $\mathcal{V}$.

- C) Si determini una matrice ortogonalmente diagonalizzante la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^4$ sul sottospazio di equazione $x + y - z - t = 0$.

- D) Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (2, 3, 5, 0)$ appartiene alla immagine Π della applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ data da $f_k(x, y, z) = (x + y, 2x + 2ky, 4x + z, x + 4ky - z)$. Posto $k = 0$, quanto vale $d(v, \Pi)$?

- E) Si dica per quali valori del parametro reale k il sottospazio $V = \langle (5, 4, 3), (3 + k, 2, 1 + k) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ contiene almeno un

autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- F) In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare $\mathbf{x} \star \mathbf{y} := 2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$ si determini un complemento ortogonale dello spazio vettoriale $W := \mathcal{L}((0, 1, 0), (1, 1, 1))$.

- G) Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ (se esistono) la conica $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + 2kxy + y^2 + 2ky + 1 = 0$ è riducibile ed in tale caso se ne determinino le rette componenti ed i loro punti di intersezione.



Algebra e Geometria

Secondo Appello - 02/02/2026

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Si determini, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la posizione reciproca e le eventuali intersezioni in $AG_3(\mathbb{R})$ delle due rette

$$r: \begin{cases} kx + 4y + 3z = k \\ 3x + y = 0 \end{cases} \quad \text{ed } s: \begin{cases} 2x + ky = 0 \\ (k-1)x - y + z = k \end{cases}.$$

- B) In $\mathcal{V} := \{f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] : \deg(f) \leq 2\}$, sia $U_k := \{f(x, y) \in \mathcal{V} : f(x, 2k + x) = 0\}$. Si determinini, al variare di k un complemento *diretto* W_k di U_k in $\mathcal{V}$.

- C) Si determini una matrice ortogonalmente diagonalizzante la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^4$ sul sottospazio di equazione $x + 2y - z = 0$.

- D) Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (2, 3, 5, 0)$ appartiene alla immagine Π della applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ data da $f_k(x, y, z) = (x + y, 2x - ky, 4x + z, x - 2ky - z)$. Posto $k = 0$, quanto vale $d(v, \Pi)$?

- E) Si dica per quali valori del parametro reale k il sottospazio $V = \langle (0, 2, 2), (k, 2, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ contiene almeno un autovettore

della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- F) In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare $\mathbf{x} \star \mathbf{y} := x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ si determini un complemento ortogonale dello spazio vettoriale $W := \mathcal{L}((1, 0, 0), (1, 1, 1))$.

- G) Si determini per quali valori di k la conica di equazione $\mathcal{C}_k : kx^2 + 6xy + 2x + (k + 1) = 0$ è riducibile ed in tali casi se ne determinino i punti doppi e le rette componenti.



Algebra e Geometria

Secondo Appello - 02/02/2026

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) Si determini, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la posizione reciproca e le eventuali intersezioni in $AG_3(\mathbb{R})$ delle due rette

$$r: \begin{cases} 4x + ky + 3z = k \\ x + 3y = 0 \end{cases} \quad \text{ed } s: \begin{cases} kx + 2y = 0 \\ -x + (k-1)y + z = k \end{cases}.$$

B) In $\mathcal{V} := \{f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] : \deg(f) \leq 2\}$, sia $U_k := \{f(x, y) \in \mathcal{V} : f(ky, y) = 0\}$. Si determinini, al variare di k un complemento *diretto* W_k di U_k in $\mathcal{V}$.

C) Si determini una matrice ortogonalmente diagonalizzante la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^4$ sul sottospazio di equazione $x - 2y + t = 0$.

D) Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (2, 0, 5, 3)$ appartiene alla immagine Π della applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ data da $f_k(x, y, z) = (x + y, 2x - ky, 4x + z, x - 2ky - z)$. Posto $k = 0$, quanto vale $d(v, \Pi)$?

E) Si dica per quali valori del parametro reale k il sottospazio $V = \langle (2, k, 2), (0, -1, k-3) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ contiene almeno un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

F) In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare $\mathbf{x} \star \mathbf{y} := 2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$ si determini un complemento ortogonale dello spazio vettoriale $W := \mathcal{L}((1, 0, 0), (1, 0, 1))$.

G) Si determini per quali valori di k la conica di equazione $\mathcal{C}_k : kx^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 1 = 0$ è riducibile ed in tali casi se ne determinino i punti doppi le rette componenti.