

## Algebra Lineare e Geometria

Primo Appello - 10/01/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

### Quesiti

- A) Si determini la matrice della proiezione ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  sul sottospazio  $x - y + z = 0$ ; se ne calcolino gli autovalori ed una matrice diagonalizzante per essa.

---



---

- B) Si determini, al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$  la dimensione del sottospazio affine di  $AG_3(\mathbb{R})$  generato dai punti  $P = (1, 0, 0)$ ,  $Q = (0, 1, 0)$ ,  $R_k = (k, 0, k)$ ,  $S = (0, k^2, 0)$ .

---



---

- C) Sia  $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare data da  $\phi(x, y, z, t) = (3x + y, z + t, x + y + z)$ . Si determinino la dimensione ed una base sia dell'immagine di  $\phi$  che del  $\ker \phi$ . È  $\phi$  suriettiva?

---



---

- D) In  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , si determinino, se esistono, i valori del parametro reale  $k$  per cui l'intersezione dei due piani  $\pi : x_1 - kx_2 + kx_3 - x_4 = 0$  e  $\sigma : x_2 + x_4 = 0$  è contenuta nel piano  $\theta : kx_1 + x_2 + x_3 + kx_4 = 0$ .

---



---

- E) Sia  $U = \{f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y] \mid \deg(f) \leq 2, \forall y \in \mathbb{R} : f(0, y) = 0\}$ . Si determini la dimensione ed una base della copertura lineare di  $U$ .

---



---

- F) Si determinino al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$  la compatibilità ed il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (1-k)x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = 2k + 1 \\ x + (k+1)z = 1 \end{cases} .$$

---



---

- G) Si scriva un sistema lineare che abbia come insieme delle sue soluzioni  $\mathcal{S} = \{(1 + 2a, 0, b, c + a) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ . Qual è il rango di tale sistema?

---



---

## Algebra Lineare e Geometria

Primo Appello - 10/01/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

### Quesiti

- A) Si determini la matrice della proiezione ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  sul sottospazio  $x + y + z = 0$ ; se ne calcolino gli autovalori ed una matrice diagonalizzante per essa.

---



---

- B) Si determini, al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$  la dimensione del sottospazio affine di  $AG_3(\mathbb{R})$  generato dai punti  $P = (0, 0, 1)$ ,  $Q = (0, -1, 0)$ ,  $R_k = (k, 0, k)$ ,  $S = (0, k^2, 0)$ .

---



---

- C) Sia  $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare data da  $\phi(x, y, z, t) = (2x + y, z + t, 2x + y + z)$ . Si determinino la dimensione ed una base sia dell'immagine di  $\phi$  che del  $\ker \phi$ . È  $\phi$  suriettiva?

---



---

- D) In  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , si determinino, se esistono, i valori del parametro reale  $k$  per cui l'intersezione dei due piani  $\pi : x_1 - kx_2 + kx_3 - x_4 = 0$  e  $\sigma : x_2 + x_4 = 0$  è contenuta nel piano  $\theta : x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$ .

---



---

- E) Sia  $U = \{f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y] \mid \deg(f) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} : f(x, 0) = 0\}$ . Si determini la dimensione ed una base della copertura lineare di  $U$ .

---



---

- F) Si determinino al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$  la compatibilità ed il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (1-k)x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = 2k + 1 \\ x + (k+1)z = 1 \end{cases} .$$

---



---

- G) Si scriva un sistema lineare che abbia come insieme delle sue soluzioni  $\mathcal{S} = \{(a, 1+a, 0, b+a) : a, b \in \mathbb{R}\}$ . Qual è il rango di tale sistema?

---



---



## Algebra Lineare e Geometria

Primo Appello - 10/01/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

### Quesiti

- A) Si determini la matrice della proiezione ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  sul sottospazio  $x + y - z = 0$ ; se ne calcolino gli autovalori ed una matrice diagonalizzante per essa.

---



---

- B) Si determini, al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$  la dimensione del sottospazio affine di  $AG_3(\mathbb{R})$  generato dai punti  $P = (1, 0, 0)$ ,  $Q = (0, 1, 0)$ ,  $R_k = (k, 0, -k)$ ,  $S = (0, k^2, 0)$ .

---



---

- C) Sia  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare data da  $\phi(x, y, z) = (x, 2y + z, 2x + 2y + z)$ . Si determinino la dimensione ed una base sia dell'immagine di  $\phi$  che del  $\ker \phi$ . È  $\phi$  iniettiva?

---



---

- D) In  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , si determinino, se esistono, i valori del parametro reale  $k$  per cui l'intersezione dei due piani  $\pi : x_1 - kx_2 + kx_3 - x_4 = 0$  e  $\sigma : x_2 + x_4 = 0$  è contenuta nel piano  $\theta : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ .

---



---

- E) Sia  $U = \{f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y] \mid \deg(f) \leq 2, \forall y \in \mathbb{R} : f(y, y) = 0\}$ . Si determini la dimensione ed una base della copertura lineare di  $U$ .

---



---

- F) Si determinino al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$  la compatibilità ed il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} y + (1-k)z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2k + 1 \\ (k+1)x + z = 1 \end{cases} .$$

---



---

- G) Si scriva un sistema lineare che abbia come insieme delle sue soluzioni  $\mathcal{S} = \{(1+a, 1+a, 2+b, a+b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ . Qual è il rango di tale sistema?

---



---

## Algebra Lineare e Geometria

Primo Appello - 10/01/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

### Quesiti

- A) Si determini la matrice della proiezione ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  sul sottospazio  $x - y - z = 0$ ; se ne calcolino gli autovalori ed una matrice diagonalizzante per essa.

---



---

- B) Si determini, al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$  la dimensione del sottospazio affine di  $AG_3(\mathbb{R})$  generato dai punti  $P = (1, 0, 0)$ ,  $Q = (0, 4, 0)$ ,  $R_k = (k, 0, k)$ ,  $S = (0, k^2, 0)$ .

---



---

- C) Sia  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare data da  $\phi(x, y, z) = (x, 2y + z, 2x + y + 2z, y)$ . Si determinino la dimensione ed una base sia dell'immagine di  $\phi$  che del ker di  $\phi$ . È  $\phi$  iniettiva?

---



---

- D) In  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , si determinino, se esistono, i valori del parametro reale  $k$  per cui l'intersezione dei due piani  $\pi : x_1 - kx_2 + kx_3 - x_4 = 0$  e  $\sigma : x_2 + x_4 = 0$  è contenuta nel piano  $\theta : kx_1 + x_2 + x_3 - kx_4 = 0$ .

---



---

- E) Sia  $U = \{f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y] \mid \deg(f) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} : f(x, -x) = 0\}$ . Si determini la dimensione ed una base della copertura lineare di  $U$ .

---



---

- F) Si determinino al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$  la compatibilità ed il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + (1-k)y = 0 \\ 2x + 3y + z = 2k + 1 \\ y + (k+1)z = 1 \end{cases} .$$

---



---

- G) Si scriva un sistema lineare che abbia come insieme delle sue soluzioni  $\mathcal{S} = \{(1+a, 1+b, 2+b, a+b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ . Qual è il rango di tale sistema?

---



---