

Algebra Lineare e Geometria

Primo Appello - 10/01/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Si determini la matrice della proiezione ortogonale di \mathbb{R}^3 sul sottospazio $x - y + z = 0$; se ne calcolino gli autovalori ed una matrice diagonalizzante per essa.

- B) Si determini, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la dimensione del sottospazio affine di $AG_3(\mathbb{R})$ generato dai punti $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 0)$, $R_k = (k, 0, k)$, $S = (0, k^2, 0)$.

- C) Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da $\phi(x, y, z, t) = (3x + y, z + t, x + y + z)$. Si determinino la dimensione ed una base sia dell'immagine di ϕ che del \ker di ϕ . È ϕ suriettiva?

- D) In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, si determinino, se esistono, i valori del parametro reale k per cui l'intersezione dei due piani $\pi : x_1 - kx_2 + kx_3 - x_4 = 0$ e $\sigma : x_2 + x_4 = 0$ è contenuta nel piano $\theta : kx_1 + x_2 + x_3 + kx_4 = 0$.

- E) Sia $U = \{f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y] \mid \deg(f) \leq 2, \forall y \in \mathbb{R} : f(0, y) = 0\}$. Si determini la dimensione ed una base della copertura lineare di U .

- F) Si determinino al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità ed il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (1 - k)x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = 2k + 1 \\ x + (k + 1)z = 1 \end{cases}.$$

- G) Si scriva un sistema lineare che abbia come insieme delle sue soluzioni $\mathcal{S} = \{(1 + 2a, 0, b, c + a) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Qual è il rango di tale sistema?



Algebra Lineare e Geometria

Primo Appello - 10/01/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Si determini la matrice della proiezione ortogonale di \mathbb{R}^3 sul sottospazio $x + y + z = 0$; se ne calcolino gli autovalori ed una matrice diagonalizzante per essa.

- B) Si determini, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la dimensione del sottospazio affine di $AG_3(\mathbb{R})$ generato dai punti $P = (0, 0, 1)$, $Q = (0, -1, 0)$, $R_k = (k, 0, k)$, $S = (0, k^2, 0)$.

- C) Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da $\phi(x, y, z, t) = (2x + y, z + t, 2x + y + z)$. Si determinino la dimensione ed una base sia dell'immagine di ϕ che del \ker di ϕ . È ϕ suriettiva?

- D) In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, si determinino, se esistono, i valori del parametro reale k per cui l'intersezione dei due piani $\pi : x_1 - kx_2 + kx_3 - x_4 = 0$ e $\sigma : x_2 + x_4 = 0$ è contenuta nel piano $\theta : x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$.

- E) Sia $U = \{f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y] \mid \deg(f) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} : f(x, 0) = 0\}$. Si determini la dimensione ed una base della copertura lineare di U .

- F) Si determinino al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità ed il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (1 - k)x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = 2k + 1 \\ x + (k + 1)z = 1 \end{cases}.$$

- G) Si scriva un sistema lineare che abbia come insieme delle sue soluzioni $\mathcal{S} = \{(a, 1 + a, 0, b + a) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Qual è il rango di tale sistema?



Algebra Lineare e Geometria

Primo Appello - 10/01/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Si determini la matrice della proiezione ortogonale di \mathbb{R}^3 sul sottospazio $x + y - z = 0$; se ne calcolino gli autovalori ed una matrice diagonalizzante per essa.

- B) Si determini, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la dimensione del sottospazio affine di $AG_3(\mathbb{R})$ generato dai punti $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 0)$, $R_k = (k, 0, -k)$, $S = (0, k^2, 0)$.

- C) Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da $\phi(x, y, z) = (x, 2y + z, 2x + 2y + z)$. Si determinino la dimensione ed una base sia dell'immagine di ϕ che del \ker di ϕ . È ϕ iniettiva?

- D) In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, si determinino, se esistono, i valori del parametro reale k per cui l'intersezione dei due piani $\pi : x_1 - kx_2 + kx_3 - x_4 = 0$ e $\sigma : x_2 + x_4 = 0$ è contenuta nel piano $\theta : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

- E) Sia $U = \{f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y] \mid \deg(f) \leq 2, \forall y \in \mathbb{R} : f(y, y) = 0\}$. Si determini la dimensione ed una base della copertura lineare di U .

- F) Si determinino al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità ed il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} y + (1 - k)z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2k + 1 \\ (k + 1)x + z = 1 \end{cases}.$$

- G) Si scriva un sistema lineare che abbia come insieme delle sue soluzioni $\mathcal{S} = \{(1 + a, 1 + a, 2 + b, a + b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Qual è il rango di tale sistema?



Algebra Lineare e Geometria

Primo Appello - 10/01/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Si determini la matrice della proiezione ortogonale di \mathbb{R}^3 sul sottospazio $x - y - z = 0$; se ne calcolino gli autovalori ed una matrice diagonalizzante per essa.

- B) Si determini, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la dimensione del sottospazio affine di $AG_3(\mathbb{R})$ generato dai punti $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 4, 0)$, $R_k = (k, 0, k)$, $S = (0, k^2, 0)$.

- C) Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da $\phi(x, y, z) = (x, 2y + z, 2x + y + 2z, y)$. Si determinino la dimensione ed una base sia dell'immagine di ϕ che del \ker di ϕ . È ϕ iniettiva?

- D) In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, si determinino, se esistono, i valori del parametro reale k per cui l'intersezione dei due piani $\pi : x_1 - kx_2 + kx_3 - x_4 = 0$ e $\sigma : x_2 + x_4 = 0$ è contenuta nel piano $\theta : kx_1 + x_2 + x_3 - kx_4 = 0$.

- E) Sia $U = \{f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y] \mid \deg(f) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} : f(x, -x) = 0\}$. Si determini la dimensione ed una base della copertura lineare di U .

- F) Si determinino al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità ed il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + (1 - k)y = 0 \\ 2x + 3y + z = 2k + 1 \\ y + (k + 1)z = 1 \end{cases}.$$

- G) Si scriva un sistema lineare che abbia come insieme delle sue soluzioni $\mathcal{S} = \{(1 + a, 1 + b, 2 + b, a + b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Qual è il rango di tale sistema?
