

**Algebra e Geometria**

Quarto Appello - 17/06/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

**Quesiti**

A) Si scrivano le componenti del vettore  $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$  rispetto la base ordinata

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

---

---

B) In  $\mathbb{R}^4$  determini per quali valori del parametro reale  $k$  i sottospazi  $U_k = \{(x, y, z, t) : x + y - z = 0, x - ky = 0\}$  e  $W_k = \mathcal{L}((1, 1, k, 0), (k, 1, 1, 0))$  sono in somma diretta.

---

---

C) Posti  $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & k & -2 \\ 1 & 1 & 1 & k+1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  e  $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k \end{pmatrix}$ , si determinino, se esistono, i valori del parametro reale  $k$  tali che il sistema  $A_k X = B_k$  sia compatibile.

---

---

D) In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , si considerino le coniche  $\mathcal{C}_1 : kx_1^2 + kx_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$  e  $\mathcal{C}_2 : 2kx_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2 = 0$ . Si determino, se esistono, i valori del parametro reale  $k$  per cui i centri delle due coniche giacciono sulla retta  $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ .

---

---

E) In  $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ , si determini l'equazione del piano  $\pi$  contenente la retta di equazione  $x + y = x + z = 0$  ed ortogonale al piano di equazione  $y - 2z = 0$ .

---

---

F) In  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ , data la retta  $r$  di equazione  $x - y = 2z + x + 1 = 0$ , si determini una retta  $s$  ortogonale ed incidente ad  $r$  e passante per il punto  $(1, 1, 1)$ .

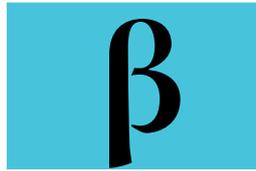
---

---

G) Si determini un prodotto scalare  $\star : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $(1, 1), (1, 0)$  sia una base ortonormale rispetto ad esso.

---

---



**Algebra e Geometria**

Quarto Appello - 17/06/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

**Quesiti**

A) Si scrivano le componenti del vettore  $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$  rispetto la base ordinata

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

B) In  $\mathbb{R}^4$  determini per quali valori del parametro reale  $k$  i sottospazi  $U_k = \{(x, y, z, t) : x - y + z = 0, x - kz = 0\}$  e  $W_k = \mathcal{L}((1, k, 1, 0), (k, 1, 1, 0))$  sono in somma diretta.

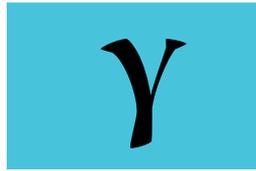
C) Posti  $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & k \\ 0 & -2 & 1 & 3 & -k \end{pmatrix}$  e  $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k \end{pmatrix}$ , si determinino, se esistono, i valori del parametro reale  $k$  tali che il sistema  $A_k X = B_k$  sia compatibile.

D) In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , si considerino le coniche  $\mathcal{C}_1 : kx_1^2 + kx_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$  e  $\mathcal{C}_2 : 2kx_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2 = 0$ . Si determinino, se esistono, i valori del parametro reale  $k$  per cui i centri delle due coniche giacciono sulla retta  $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$ .

E) In  $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ , si determini l'equazione del piano  $\pi$  contenente la retta di equazione  $x - y = x + z = 0$  ed ortogonale al piano di equazione  $y + 2z = 0$ .

F) In  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ , data la retta  $r$  di equazione  $x + y = 2y + x + 1 = 0$ , si determini una retta  $s$  ortogonale ed incidente ad  $r$  e passante per il punto  $(0, 1, 1)$ .

G) Si determini un prodotto scalare  $\star : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $(1, -1), (1, 0)$  sia una base ortonormale rispetto ad esso.



**Algebra e Geometria**

Quarto Appello - 17/06/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

**Quesiti**

A) Si scrivano le componenti del vettore  $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$  rispetto la base ordinata

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

---

---

B) In  $\mathbb{R}^4$  determini per quali valori del parametro reale  $k$  i sottospazi  $U_k = \{(x, y, z, t) : x + y - t = 0, x - ky = 0\}$  e  $W_k = \mathcal{L}((1, 1, 0, k), (k, 1, 0, 1))$  sono in somma diretta.

---

---

C) Posti  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ k^2 \end{pmatrix}$ , si determinino, se esistono, i valori del parametro reale  $k$  tali che il sistema  $AX = B_k$  sia compatibile.

---

---

D) In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , si considerino le coniche  $\mathcal{C}_1 : kx_1^2 + kx_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$  e  $\mathcal{C}_2 : 2kx_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_3^2 = 0$ . Si determinino, se esistono, i valori del parametro reale  $k$  per cui i centri delle due coniche giacciono sulla retta  $-x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$ .

---

---

E) In  $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ , si determini l'equazione del piano  $\pi$  contenente la retta di equazione  $x + y = x - z = 0$  ed ortogonale al piano di equazione  $y - z = 0$ .

---

---

F) In  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ , data la retta  $r$  di equazione  $x - 2y = 2z + x - 1 = 0$ , si determini una retta  $s$  ortogonale ed incidente ad  $r$  e passante per il punto  $(1, 0, 1)$ .

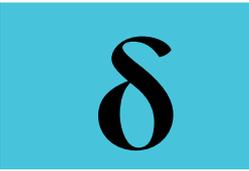
---

---

G) Si determini un prodotto scalare  $\star : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $(-1, 1), (1, 0)$  sia una base ortonormale rispetto ad esso.

---

---



**Algebra e Geometria**

Quarto Appello - 17/06/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

**Quesiti**

A) Si scrivano le componenti del vettore  $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$  rispetto la base ordinata

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

---

---

B) In  $\mathbb{R}^4$  determini per quali valori del parametro reale  $k$  i sottospazi  $U_k = \{(x, y, z, t) : x + y - z = 0, x + ky = 0\}$  e  $W_k = \mathcal{L}((1, 1, -k, 0), (-k, 1, 1, 0))$  sono in somma diretta.

---

---

C) Posti  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B_k = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$ , si determinino, se esistono, i valori del parametro reale  $k$  tali che il sistema  $AX = B_k$  sia compatibile.

---

---

D) In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , si considerino le coniche  $\mathcal{C}_1 : kx_1^2 + kx_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$  e  $\mathcal{C}_2 : 2kx_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_3^2 = 0$ . Si determino, se esistono, i valori del parametro reale  $k$  per cui i centri delle due coniche giacciono sulla retta  $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ .

---

---

E) In  $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ , si determini l'equazione del piano  $\pi$  contenente la retta di equazione  $x - y = x - z = 0$  ed ortogonale al piano di equazione  $y + z = 0$ .

---

---

F) In  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ , data la retta  $r$  di equazione  $x + 2y = 2z - x + 1 = 0$ , si determini una retta  $s$  ortogonale ed incidente ad  $r$  e passante per il punto  $(1, 1, 0)$ .

---

---

G) Si determini un prodotto scalare  $\star : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $(1, -1), (0, 1)$  sia una base ortonormale rispetto ad esso.

---

---