



**Algebra e Geometria**

Terzo Appello - 15/04/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

**Quesiti**

A) Si scriva un sistema lineare che abbia insieme di soluzioni  $\mathcal{S} := (1, 0, 0, 1) + \mathcal{L}((1, 1, 0, 1), (0, -1, 0, 1))$ .

---

---

B) Si determini, al variare del parametro  $k \in \mathbb{C}$  il rango della seguente matrice  $\begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ -1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 - k^2 \end{pmatrix}$ .

---

---

C) Sia  $\mathcal{V} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : a + c = 0 \right\}$ . Si determini una base ortonormale di  $\mathcal{V}$  rispetto al prodotto scalare dato da  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = aa' + 2bb' + cc' + dd'$ .

---

---

D) Si determini la dimensione ed una base dello spazio vettoriale  $\mathcal{V} := \mathcal{L}\{f(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(f) < 4, f(2i) = 0, f(1) = 0\}$ .

---

---

E) Si determini per quali valori di  $k$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 2 - k & 1 - k & 1 \end{pmatrix}$  è diagonalizzabile ed in tali casi se ne calcoli la matrice diagonalizzante.

---

---

F) Si determini una retta a distanza 3 dal piano di equazione  $x + y - z = 0$ .

---

---

G) Sia  $C_k$  la conica di equazione:  $(k + 1)xy + kyz + xz = 0$ .

(a) Si determinino, se esistono, i valori di  $k$  tali che l'intersezioni delle polari condotte dai punti  $(i : 0 : 2)$  e  $(-i : 0 : 2)$  sia il punto  $(-1 : 1 : -2)$ .

(b) Si determini l'equazione di una retta  $r$  tale che per ogni  $k$  il centro di  $C_k$  appartenga ad  $r$ .

---

---



**Algebra e Geometria**

Terzo Appello - 15/04/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

**Quesiti**

A) Si scriva un sistema lineare che abbia insieme di soluzioni  $\mathcal{S} := (1, 0, -1, 0) + \mathcal{L}((1, 0, -1, 1), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 0, 1))$ .

---

---

B) Si determini, al variare del parametro  $k \in \mathbb{C}$  il rango della seguente matrice  $\begin{pmatrix} 2k & 1 & 0 & 0 \\ -1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k^2 \end{pmatrix}$ .

---

---

C) Sia  $\mathcal{V} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : a - b = 0 \right\}$ . Si determini una base ortonormale di  $\mathcal{V}$  rispetto al prodotto scalare dato da  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = aa' + bb' + cc' + 2dd'$ .

---

---

D) Si determini la dimensione ed una base dello spazio vettoriale  $\mathcal{V} := \mathcal{L}(\{f(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(f) < 4, f(0) = i\})$ .

---

---

E) Si determini per quali valori di  $k$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k-1 & k & 0 \\ 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$  è diagonalizzabile ed in tali casi se ne calcoli la matrice diagonalizzante.

---

---

F) Si determini una retta a distanza 2 dal piano di equazione  $x - y - z = 0$ .

---

---

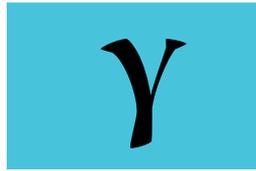
G) Sia  $C_k$  la conica di equazione:  $(k+1)xz + kxy + yz = 0$ .

(a) Si determinino, se esistono, i valori di  $k$  tali che l'intersezioni delle polari condotte dai punti  $(0 : i : 2)$  e  $(0 : -i : 2)$  sia il punto  $(1 : -3 : -2)$ .

(b) Si determini l'equazione di una retta  $r$  tale che per ogni  $k$  il centro di  $C_k$  appartenga ad  $r$ .

---

---



**Algebra e Geometria**

Terzo Appello - 15/04/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

**Quesiti**

A) Si scriva un sistema lineare che abbia insieme di soluzioni  $\mathcal{S} := (1, 1, 1, 2) + \mathcal{L}((1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1))$ .

---

---

B) Si determini, al variare del parametro  $k \in \mathbb{C}$  il rango della seguente matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k^2 \\ 0 & 0 & k & k \end{pmatrix}$ .

---

---

C) Sia  $\mathcal{V} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : a + b = 0 \right\}$ . Si determini una base ortonormale di  $\mathcal{V}$  rispetto al prodotto scalare dato da  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = 2aa' + bb' + cc' + dd'$ .

---

---

D) Si determini la dimensione ed una base dello spazio vettoriale  $\mathcal{V} := \mathcal{L}(\{f(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(f) < 4, f(1) = 0, f(i) = 0\})$ .

---

---

E) Si determini per quali valori di  $k$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-k \\ 0 & k & 1-k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  è diagonalizzabile ed in tali casi se ne calcoli la matrice diagonalizzante.

---

---

F) Si determini una retta a distanza 3 dal piano di equazione  $x + y + z = 0$ .

---

---

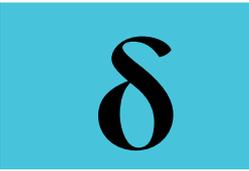
G) Sia  $C_k$  la conica di equazione:  $(k + 1)xy + kxz + yz = 0$ .

(a) Si determinino, se esistono, i valori di  $k$  tali che l'intersezioni delle polari condotte dai punti  $(0 : 2 : i)$  e  $(0 : 2 : -i)$  sia il punto  $(1 : -3 : -4)$ .

(b) Si determini l'equazione di una retta  $r$  tale che per ogni  $k$  il centro di  $C_k$  appartenga ad  $r$ .

---

---



**Algebra e Geometria**

Terzo Appello - 15/04/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

**Quesiti**

A) Si scriva un sistema lineare che abbia insieme di soluzioni  $\mathcal{S} := (1, 0, 1, 0) + \mathcal{L}((1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0))$ .

---

---

B) Si determini, al variare del parametro  $k \in \mathbb{C}$  il rango della seguente matrice  $\begin{pmatrix} 2k & 1 & 0 & 0 \\ -2 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k^2 \end{pmatrix}$ .

---

---

C) Sia  $\mathcal{V} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : a + d = 0 \right\}$ . Si determini una base ortonormale di  $\mathcal{V}$  rispetto al prodotto scalare dato da  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = aa' + bb' + 2cc' + dd'$ .

---

---

D) Si determini la dimensione ed una base dello spazio vettoriale  $\mathcal{V} := \mathcal{L}(\{f(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(f) < 4, f(i) = 1\})$ .

---

---

E) Si determini per quali valori di  $k$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & k-1 & 1 \\ 0 & k & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  è diagonalizzabile ed in tali casi se ne calcoli la matrice diagonalizzante.

---

---

F) Si determini una retta a distanza 3 dal piano di equazione  $x - y - z = 0$ .

---

---

G) Sia  $C_k$  la conica di equazione:  $(k+1)yz + kxy + xz = 0$ .

(a) Si determinino, se esistono, i valori di  $k$  tali che l'intersezioni delle polari condotte dai punti  $(2 : 0 : i)$  e  $(2 : 0 : -i)$  sia il punto  $(-1 : 1 : 0)$ .

(b) Si determini l'equazione di una retta  $r$  tale che per ogni  $k$  il centro di  $C_k$  appartenga ad  $r$ .

---

---