Luoghi geometrici:

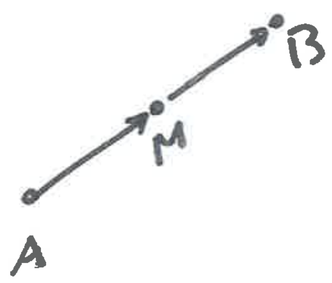
$1+1\neq 0$

$EG(2,\mathbb{R})$ $\qquad$ $EG(3,\mathbb{R})$

chiediamo insiemi di punti che soddisfino certe condizioni "metriche".

Siano $A, B \in AG(n, \mathbb{K})$. Si dice punto medio fra A e B il punto M tale che $2\vec{AM} = \vec{AB}$ $\qquad$ $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$

$$\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB} \quad \text{con} \quad \vec{AM} = \vec{MB}$$



$A = (x_1\, x_2 \dots x_n)$ $\qquad$ $B = (y_1 \dots y_n)$

$\Rightarrow \vec{AB} = (y_1 - x_1 \dots y_n - x_n) \Rightarrow \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{AM} \Rightarrow \vec{AM} = \left(\frac{y_1 - x_1}{2} \dots \frac{y_n - x_n}{2}\right)$

$$M = A + \vec{AM} = \left(\frac{y_1 + x_1}{2}\ \frac{y_2 + x_2}{2} \dots \frac{y_n + x_n}{2}\right)$$

__OSS__: in $\mathcal{E}G(n,\mathbb{R})$

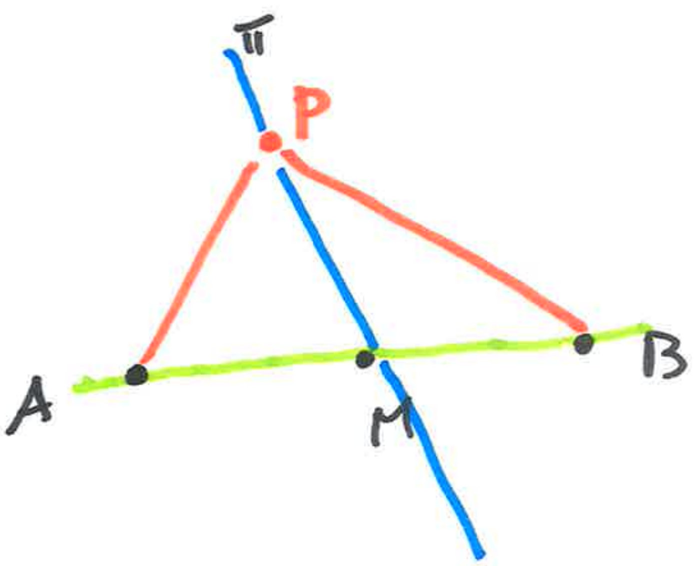
$$\begin{array}{ccc} d(A,M) & = & d(M,B) \\ \| & & \| \\ \|\overrightarrow{AM}\| & & \|\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{AM}\| \end{array}$$

__Def__: In $\mathcal{E}G(n,\mathbb{R})$ si dice <u>iperpiano assiale</u> il luogo dei punti che sono equidistanti da due punti dati A, B. $A \neq B$

$$\Pi = \{ X \in \mathcal{E}G(n,\mathbb{R}) \mid d(A,X) = d(B,X) \}.$$

<u>Teorema</u>: Siano A, B due punti distinti di $\mathcal{E}G(n,\mathbb{R})$. Allora l'iperpiano assiale fra A e B è ~~un~~ iperpiano (= sott. lineare di dim $n-1$) che passa per il punto medio fra A e B ed è ortogonale alla direzione $\overrightarrow{AB}$ della retta fra A e B.

DIM: $n=2$



Se $d(A,P)=d(B,P) \Rightarrow$

$\Rightarrow P \in \pi$ con $\pi = [M; \overrightarrow{AB}^{\perp}]$

$$d(A,P)=d(B,P) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AP}\|^2 = \|\overrightarrow{BP}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}\|^2 = \|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP}\|^2 = \|\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{AM}\|^2$$

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 + 2\,\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MP} + \|\overrightarrow{MP}\|^2 = \|\overrightarrow{MP}\|^2 + \|\overrightarrow{AM}\|^2 - 2\,\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MP}$$

$$\Rightarrow 4\,\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MP} = 0 \Rightarrow P \in [M; \overrightarrow{AB}^{\perp}].$$

viceversa: se $P \in [M; \overrightarrow{AB}^{\perp}] \Rightarrow \|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}\| = \|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP}\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\| \Rightarrow d(P,A) = d(P,B)$

$\square$

In generale se $A=(x_1' \dots x_n')$ $\quad B=(y_1' \dots y_n')$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (y_1'-x_1' \dots y_n'-x_n')$$

$$M = \left(\frac{x_1'+y_1'}{2} \dots \frac{x_n'+y_n'}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ eq. dell'asse $\vec{AB} \cdot \left(x_1 - \frac{x_1'+y_1'}{2} \dots x_n - \frac{x_n'+y_n'}{2}\right) = 0$

$$(y_1'-x_1')\left[x_1 - \frac{x_1'+y_1'}{2}\right] + \dots + (y_n'-x_n')\left[x_n - \frac{x_n'+y_n'}{2}\right] = 0$$

OSS: In generale per definire uno spazio affine di dimensione K (in $AG(n, \mathbb{K})$) servono $K+1$ punti "in posizione generale" cioè tali che essi non siano contenuti in uno spazio di dim $K-1$

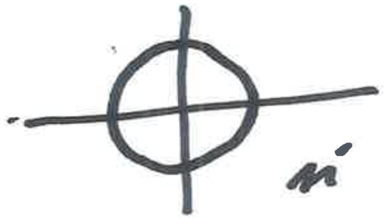
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \begin{matrix} (x_0 \ y_0 \ z_0) \\ (a \ b \ c) \end{matrix}$$

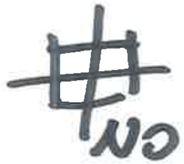
In $\mathcal{E}G(2,\mathbb{R})$ sia P un punto $r \geq 0$.

Si dice circonferenza di centro P e raggio r il luogo dei punti:

$$\mathcal{C}(P;r) := \{X : d(P,X) = r\}.$$

più in generale per $n \geq 2$ si parla di (iper) sfera.





$C = (x_c, y_c)$ $\quad X = (x, y)$

$$\|\vec{CX}\| = r \iff \|\vec{CX}\|^2 = r^2$$

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x\underline{\underline{x_c}} - 2y\underline{\underline{y_c}} = \underline{r^2 - x_c^2 - y_c^2} = \gamma$$

3 coeff ; in generale per 3 punti non allineati passa una ed una sola circonferenza.

$P=(a,b)$

$Q=(a',b')$

$R=(a'',b'')$

$$\begin{cases} a^2+b^2-2a\underline{\underline{x_c}}-2b\underline{\underline{y_c}} = \underline{\underline{\gamma}} \\ a'^2+b'^2-2a'x_c-2b'y_c = \gamma \\ a''^2+b''^2-2a''x_c-2b''y_c = \gamma \end{cases}$$

γ non è arbitrario

$$\mathcal{C} : \delta(x^2+y^2)-2\alpha x-2\beta y-\gamma=0$$ in (α, β, γ).

circonferenza generalizzata

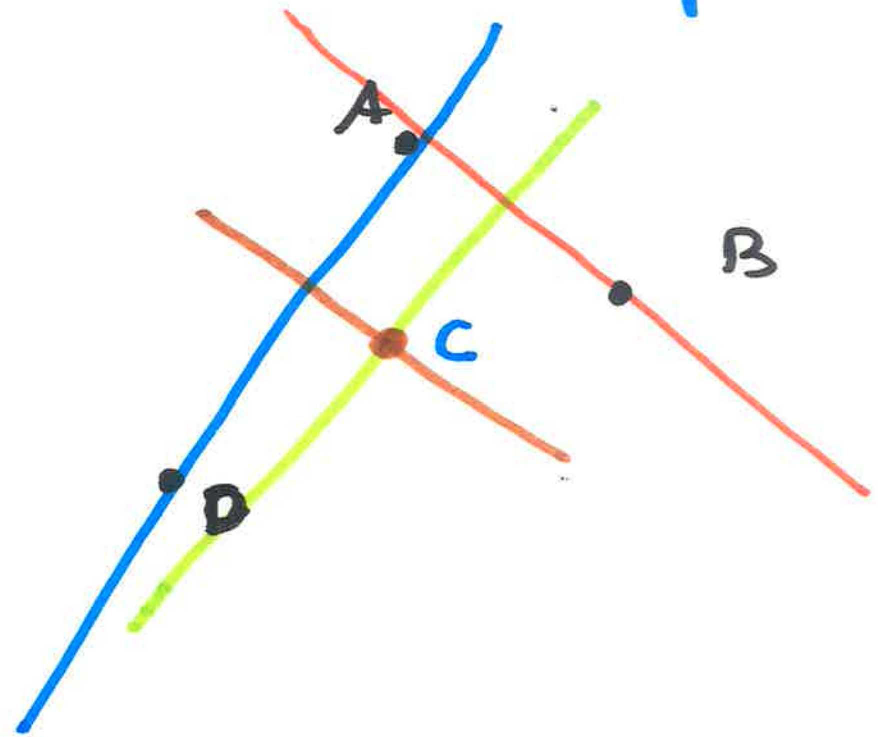
se $\delta = 0 \Rightarrow -2\alpha x - 2\beta y - \gamma = 0 \rightarrow$ <u>retta</u>

se $\delta \neq 0$ e $\gamma = r^2 - x_c^2 - y_c^2 = r^2 - \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow r^2 = \gamma + \alpha^2 + \beta^2$

se $\gamma + \alpha^2 + \beta^2 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la curva $\mathscr{C}$ è priva di punti reali

$\gamma = -\alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow$ la curva $\mathscr{C}$ contiene uno ed un solo punto <u>reale</u>.



C = centro

$$\begin{cases} d(C,A) = d(C,B) \\ d(C,A) = d(C,D) \end{cases}$$

$r_0 = d(C,A)$

Teorema dell'ordine (versione affine).

Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica di equazione

$$f(x,y)=0.$$

Allora ogni retta del piano affine interseca $\mathcal{C}$ in al più t punti ove $t=\deg f$ a meno che non sia $r\subseteq \mathcal{C}$.

$$\mathcal{C}=V(f)=\{(x,y)\in AG(2,\mathbb{K}) \mid f(x,y)=0\}.$$

$$\deg f = t$$

DIM: $y=ax+b$ e sostituiamo in $f(x,y)=0$

$$\Rightarrow \quad g(x)=0 \quad \text{ove} \quad g(x)=f(x,ax+b)$$

ci sono 2 possibilità.

$r_0 : y = ax + b$

1) $g(x) \equiv 0 \Rightarrow \forall P \in r_0$

si ha $P \in \mathcal{C}$

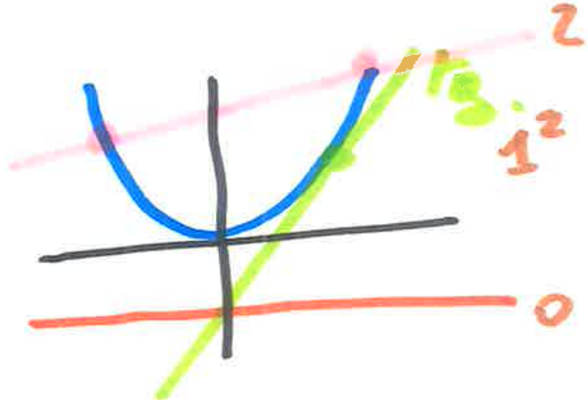
$\Rightarrow r_0 \subseteq \mathcal{C}$.

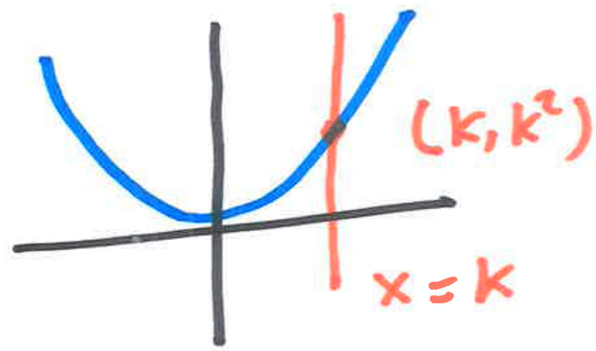
2) $0 \leq \deg g(x) \leq t$ ma $g(x) \not\equiv 0$

$\Rightarrow g(x) = 0$ ha al più $\deg g(x)$ soluzioni $\Rightarrow$ ci sono al più $\deg g(x) \leq t$ soluzioni. #

per: $x = K$ ragionamento analogo con $h(y) := f(K, y)$. □

$\mathcal{C} = V(x^2 - y) \rightarrow y = x^2$





CONICHE COME LUOGHI GEOMETRICI.

- $\mathcal{C}$ circonferenza = luogo dei punti a dist. fissata dal centro.

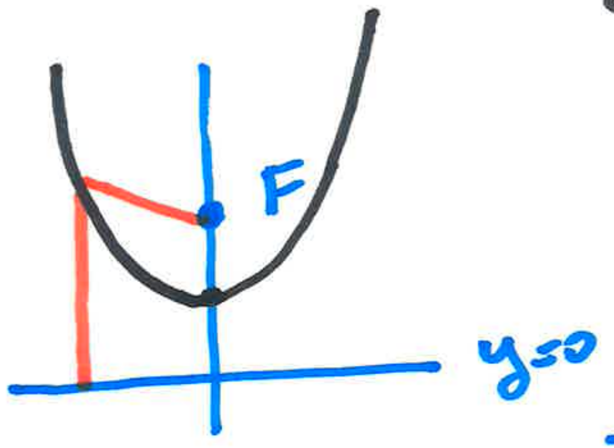
- ELLISSE: Siano F_1, F_2 due punti e $r \geq 0$
  luogo dei punti X con
  $$d(X,F_1) + d(X,F_2) = r$$

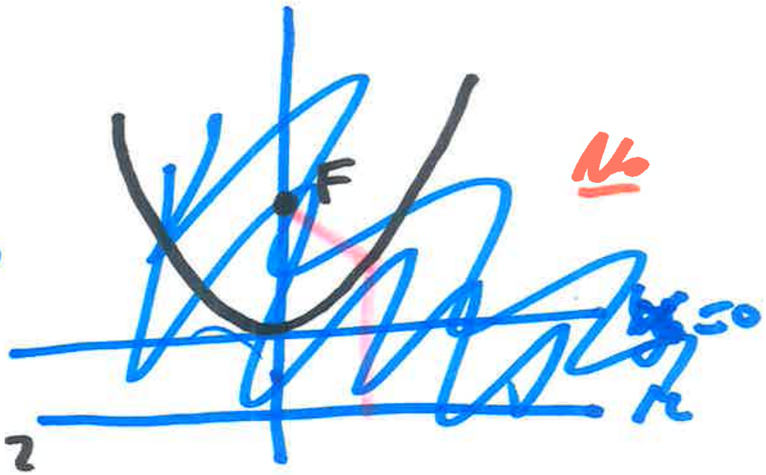
- IPERBOLE: F_1, F_2 punti
  $$d(X,F_1) - d(X,F_2) = r$$

• PARABOLA: Siano F un punto, r una retta

$\Rightarrow$ luogo dei punti X con

$$d(F,X) = d(X,r).$$





r = retta di eq. $y=0$

F punto di coord. $(0,\alpha)$ $\alpha \neq 0$

$X = (x,y)$ punto generico

$$d(F,X)^2 = d(r,X)^2$$

$$(x)^2+(\alpha-y)^2 = \frac{|y|^2}{\sqrt{1}}$$

$$x^2+\alpha^2-2\alpha y = 0$$

COMPLESSIFICAZIONE ED AMPLIAMENTO

$$\begin{array}{ccc} EG(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^n\mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ EG(n,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathbb{P}^n\mathbb{C}}} \end{array}$$

→ si aggiungono le direzioni delle rette come "punti impropri"

si fanno i calcoli in $\mathbb{C}$ invece che in $\mathbb{R}$.

(x, y) 2 coord.

$ax+by+c=0$ 3 param a meno di prop.

$[(x_0 : x_1 : x_2)]$

$[(a : b : c)]$

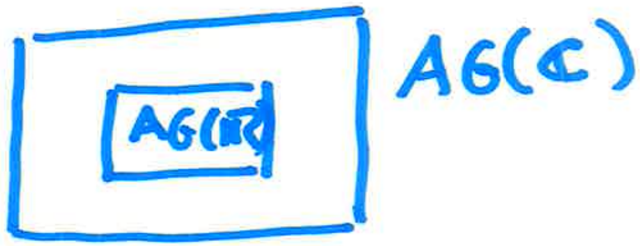
COMPLESSIFICAZIONE.

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Se abbiamo uno sp. affine

$$\begin{array}{ccc} AG(n,\mathbb{R}) & \hookrightarrow & AG(n,\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, f) & & (\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n, f') \end{array}$$

Es. $(5,3) \in \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{C}^2$



osserviamo che un punto P ha coordinate reali in $AG(n,\mathbb{C}) \iff \overline{P} = P$ ove

$$P = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\overline{P} = (\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n).$$

$$AG(n, \mathbb{R}) = \{ P \in AG(n, \mathbb{C}) : P = \overline{P} \}.$$

Def: Un sottospazio / varietà / curva di $AG(n, \mathbb{C})$ è detto <u>reale</u> se esso coincide col proprio coniugato.

$$\Sigma \subseteq AG(n, \mathbb{C}) \; ; \; \Sigma \text{ reale} \iff$$

$$\Sigma = \overline{\Sigma} = \{ \overline{P} \mid P \in \Sigma \}.$$

P reale $\iff$ le coordinate di P sono reali.
(rispetto un riferimento fissato).

<u>ATT.</u>: Non tutti i punti di un sottospazio/varietà reale sono reali!

$n=2$ $\qquad AG(2, \mathbb{C})$.

retta di eq. $x=0$

1) $r: x=0$ è reale infatti se $P=(0,a) \in r$

$\Rightarrow \overline{P}=(0,\overline{a}) \in r \Rightarrow r=\overline{r}$

2) $(0,i) \in r$ ma $(0,i) \notin AG(2,\mathbb{R})$.

<u>Teorema</u>: Sia Σ una varietà algebrica ~~che~~ che ammetta almeno un pto reale

Allora Σ è reale se e solamente se essa ammette delle equazioni che la definiscono a coeff. reali.

1) Se Σ è definita da eq. a coeff. reali $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Sigma$ è reale.

$$\Sigma = V(f_1, f_2 \dots f_t).$$

supponiamo $f_i \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$

$$P \in \Sigma \Rightarrow \begin{cases} f_1(x_1 \dots x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_t(x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{f_1(x_1 \dots x_n)} = 0 \\ \vdots \\ \overline{f_t(x_1 \dots x_n)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{f}_1(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n) = 0 \\ \vdots \\ \overline{f}_r(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} f(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n) = 0 \\ \vdots \\ f_r(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{P} \in \Sigma.$$

$\square$