Fascio di rette: ∞^1 rette contenute in un piano e passanti per un punto.

Fascio di piani: ∞^1 piani contenuti in un solido $(n=3)$ e passanti per una retta.

$n=3$ corrispondono alle rette di una geometria ~~affine~~ diversa da quella di partenza.

$$r_0 : \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

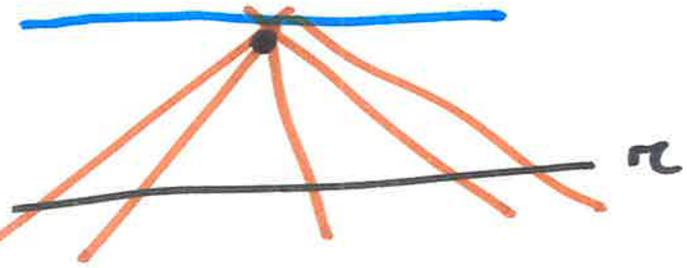
$$\pi : \alpha(ax+by+cz+d) + \beta(a'x+b'y+c'z+d') = 0$$

$(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

$r_0 \subseteq \pi_{\alpha,\beta} \quad \forall \alpha, \beta$.

$\forall P \in AG(3, \mathbb{K}) \setminus r_0 \ \exists (\alpha, \beta) : P \in \pi_{\alpha,\beta}$.

N.B.: (α, β) $\quad k(\alpha,\beta) = (k\alpha, k\beta)$ $\quad k \neq 0$
identifichiamo lo stesso piano perché danno equazioni proporzionali



Sia $n=2$ e $f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$.

Si dice curva algebrica di equazione $f(x,y)=0$

l'insieme dei punti $V(f) := \{(\bar{x},\bar{y}) \in A G(2,\mathbb{K}) \mid f(\bar{x},\bar{y}) = 0\}$.

Più in generale se $n \geq 1$ siano $f_i(x_1, x_2 \dots x_n) \in \mathbb{K}[x_1 \dots x_n]$ polinomi. Si dice varietà algebrica definita dai polinomi $f_1(x_1 \dots x_n) \dots f_t(x_1 \dots x_n)$.

l'insieme di punti

$$V(f_1 \dots f_t) := \left\{ (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} f_1(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) = 0 \\ f_2(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) = 0 \\ \vdots \\ f_t(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) = 0 \end{array} \right\}.$$

$$= V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_t).$$

OSS: Se $f(x_1 \dots x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \beta$

$$\Rightarrow V(f) = \begin{cases} (\alpha_1 \dots \alpha_n) = \underline{0} \text{ e } \beta = 0 \rightarrow AG(n, \mathbb{K}) \\ (\alpha_1 \dots \alpha_n) = \underline{0} \text{ e } \beta \neq 0 \rightarrow \emptyset \\ (\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq \underline{0} \rightarrow \text{un iperpiano.} \end{cases}$$

$(a,b) \neq (0,0)$

$V(ax+by+c)$ é una retta nel piano

$V(ax+by+cz+d)$ è un piano nello spazio.

Def.: Si dice ordine di una varietà algebrica

$V(f)$

il grado del polinomio f.

→ Una retta è una curva del primo ordine

Un piano è una superficie del primo ordine.

$n=2$, $f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$, $f(x,y) \neq \underline{0}$.

Si dice curva algebrica l'insieme $V(f)$

$n=3$ $f(x,y,z) \in \mathbb{K}[x,y,z]$, $V(f)$ é detto superficie algebrica è possibile

$$V(f) = \phi$$

$$V(0 \cdot x + 0 \cdot y + 1) = \phi$$

in $AG(2, \mathbb{R})$

$$V(x^2+y^2+1) = \phi$$

$$V(x^2+y^2+1)$$

in $AG(2, \mathbb{C})$

$$\supseteq \{(i,0), (0,i)\}$$

$$V(x^2+y^2) = \{(0,0)\}$$

in $AG(2, \mathbb{R})$

$$V(x^2+y^2) = V((x+iy)(x-iy)) =$$

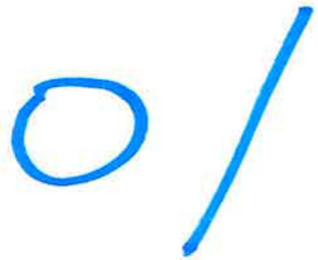
$$= V(x+iy) \cup V(x-iy)$$

in $AG(2, \mathbb{C})$

__OSS__: Siano $f(x,y), g(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$.

$\Rightarrow$ in generale
$$V(f\cdot g) = V(f) \cup V(g).$$

Una curva di equazione $f(x,y)=0$ è detta __irriducibile__ se essa non si può scrivere come unione di 2 curve algebriche del tipo
$$V(f) = V(g) \cup V(h)$$
con $f = g\cdot h$.



riducibile

__irrid.__

Geometria Euclidea

Geometria affine + distanza euclidea.

__Def__: Sia $AG(n, \mathbb{K})$ una geometria affine.

Si dice distanza d su $AG(n, \mathbb{K})$ una funzione

$$d: A \times A \longrightarrow \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

tale che

1) $\forall P, Q: \ d(P,Q) = d(Q,P)$
2) $\forall P, Q: \ d(P,Q) = 0 \iff P = Q$
3) $\forall P, Q, R: \ d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$.

A) Uno spazio affine dotato di una distanza è detto spazio metrico.

B) Sia $AG(n, \mathbb{R})$ uno sp. affine (A, V_n, f)

e sia $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ una norma.

$\|\bar{v}\| = 0 \iff v = \underline{0}$

$\|\bar{v}\| \geq 0 \quad \forall \bar{v}$

$\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$

$\|\alpha \bar{v}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|$.

$\Rightarrow$ la funzione

$$d : \begin{cases} A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ P, Q \rightarrow \|\overrightarrow{PQ}\| \end{cases}$$

è una distanza.

Spazio di Banach

C) Sia $AG(n, \mathbb{R})$ uno sp. affine, (A, V_n, f) Sp. di Hilbert

e sia $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un prod. scalare euclideo.

$\Rightarrow \forall \bar{v} \in V : \|\bar{v}\| := \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$ è una norma.

prodotto scalare def pos. $\Rightarrow$ norma $\Rightarrow$ DISTANZA

- angoli

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

- lunghezza

$$\|\bar{v}\|_2 = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = \sqrt{\sum v_i^2}$$

- distanza.

$$d(P,Q) = \|P-Q\| = \sqrt{\sum (p_i - q_i)^2}$$

DISTANZA EUCLIDEA

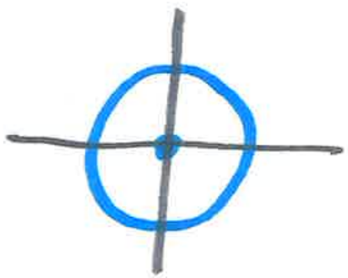
$$\|\bar{v}\|_\infty = \sup |v_i|$$

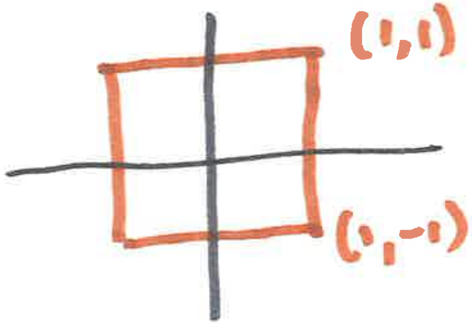
$$d_\infty(P,Q) = \sup_i |p_i - q_i|$$

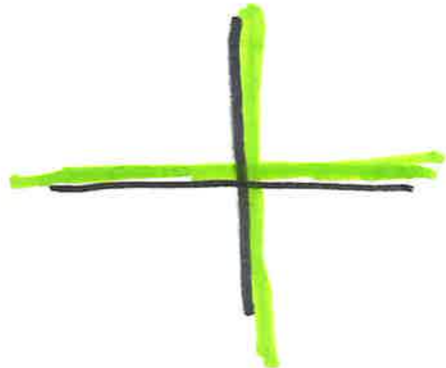
$$d_H(P,Q) = |\{i \mid p_i \neq q_i\}|$$

DISTANZA DI HAMMING.

DISTANZA EUCLIDEA	DISTANZA ∞	DISTANZA DI HAMMING
$P=(0,0)$	$P=(0,0)$	$P=(0,0)$
$X=(x,y)$:	$X=(x,y)$	$X=(x,y)$
$d_E(X,P)=1$	$d_\infty(X,P)=1$	$d_H(X,P)=1$
$\Rightarrow x^2+y^2=1$	$\sup(\lvert x\rvert,\lvert y\rvert)=1$	$\{(x,y): x=0 \text{ or } y=0\}$.







$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ e studiamo geometrie Euclidee

$EG(n,\mathbb{R}) = AG(n,\mathbb{R})$ + prod. scalare definito positivo

Geometria Euclidea → distanza fra 2 punti.
→ ortogonalità.

- Vogliamo innanzi tutto definire la distanza fra un punto ed un sottospazio

Dati 2 insiemi di punti disgiunti A e B

diciamo $$d(A, B) := \min\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

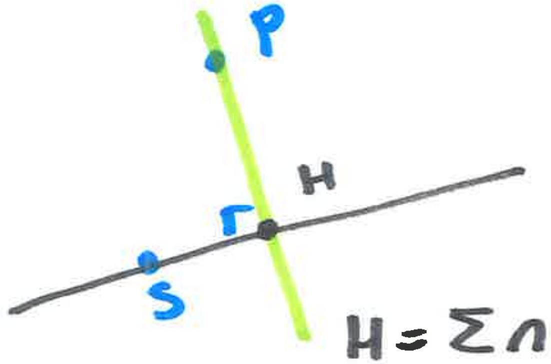
ATT. se $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow d(A,B) = 0$

dato $P \in AG(n, \mathbb{R})$ e Σ sottospazio (sottoinsieme) di $AG(n, \mathbb{R})$.

$$d(P, \Sigma) := \cancel{\min\{d(P,Q)\}} \min\{d(P,Q) \mid Q \in \Sigma\}.$$

$d(P,\Sigma) = 0 \iff P \in \Sigma$.

Σ sottospazio $\Rightarrow$ dato $P \in AG(n,\mathbb{R})$ $\exists! \, Q \in \Sigma$ tale che $d(P,Q)$ sia minima e tale punto Q è la proiezione ortogonale di P su Σ.



$\Sigma = [Q, \omega]$ $\quad$ $S \in \Sigma$

$H = \Sigma \cap [P; \omega^\perp]$

$$\Rightarrow d(P,S)^2 = \|\vec{PS}\|^2 = \|\vec{PH} + \vec{HS}\|^2 = (\vec{PH} + \vec{HS}) \cdot (\vec{PH} + \vec{HS}) =$$
$$= \vec{PH} \cdot \vec{PH} + \vec{HS} \cdot \vec{HS} = \|\vec{PH}\|^2 + \|\vec{HS}\|^2 \geq \|PH\|^2$$

$\Rightarrow d(P,\Sigma) = d(P,H)$ con H proiez. ort. di P su Σ.

$\exists$ ed unicità della proiezione ortogonale.

dato $\Sigma = [Q; W]$

e $\Pi = [P; W^\perp]$

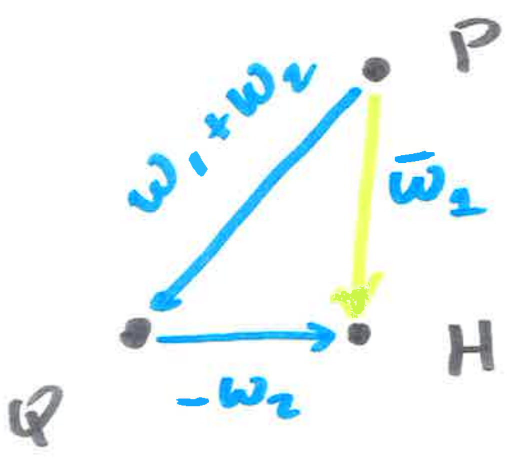
esiste uno ed un solo punto $R \in \Sigma \cap \Pi$

• $\Sigma \cap \Pi = \emptyset$ oppure $\Sigma \cap \Pi = [R; W \cap W^\perp] =$

$= [R; \{\underline{0}\}] = \{R\}$.

la proiezione ortogonale di P su Σ se esiste è unica.

$\Sigma \cap \Pi \neq \emptyset$. osserviamo che $[P; W + W^\perp]$ é tutto lo spazio affine.



$\overrightarrow{PQ} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$

ove $\overline{\omega}_1 \in W$

$\overline{\omega}_2 \in W^\perp$

consideriamo ora

H tale che $\overrightarrow{QH} = -\overline{\omega}_1$

$\Rightarrow H \in \Sigma$ e $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QH} =$

$= \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2$

$\Rightarrow \cancel{\overrightarrow{PH} \in [P; W^\perp] \cap [Q; W]}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PH} \in W^\perp \Rightarrow H \in [P; W^\perp]$

ed $H \in \Sigma = [Q; W] \Rightarrow$

$[P; W^\perp] \cap [Q; W] \neq \emptyset.$

Def: Siano $\Pi = [P; W]$ e $\Sigma := [Q; U]$ due sottospazi affini di $EG(n, \mathbb{R})$.

Si dice che Π e Σ sono <u>ortogonali</u> se ~~$\Pi \subseteq \Sigma$~~ $W \subseteq U^\perp$ oppure $W^\perp \subseteq U$.

$$W \subseteq U^\perp \iff U \subseteq W^\perp \qquad\qquad W^\perp \subseteq U \iff U^\perp \subseteq W$$

Se $\Pi = [P; W]$ è un iperpiano $\Rightarrow W^\perp$ è un sottospazio vettoriale di dim $= 1$ $\rightarrow$ <u>direzione normale</u> (o ortogonale) a Π.

- **Def**: Sia $EG(n, \mathbb{R})$ uno sp. Euclideo. Si dice riferimento Euclideo un riferimento affine

$\Gamma = (O, \mathcal{B})$ ~~rispetto~~ in cui la base $\mathcal{B}$

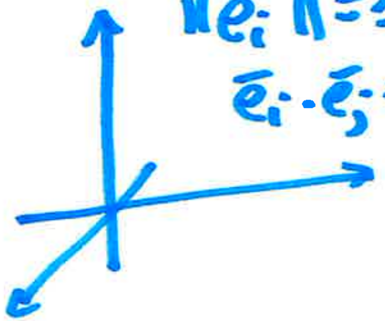
é ortonormale rispetto il prodotto scalare.

$\bar{v} = (v_1 \dots v_n)$ $\quad \bar{v} \cdot \bar{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = \sum v_i w_i$

$\bar{w} = (w_1 \dots v_n)$

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\sum_i v_i^2}$$

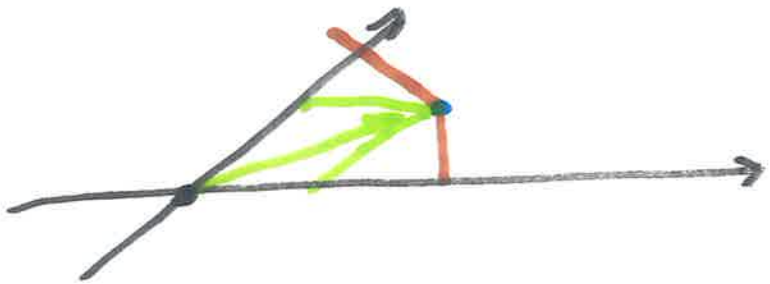
$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|Q-P\| = \sqrt{\sum_i (q_i - p_i)^2}$$



$\|\bar{e}_i\| = 1$

$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij}$

__$n=2$__ $\quad d((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$



Sia $\pi: a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n+b=0$

l'equazione di un iperpiano $[P; W]$

$W = (a_1\ a_2 \dots a_n)^\perp$ come sottospazio in quanto

W = sott. i cui vettori sono soluzioni di

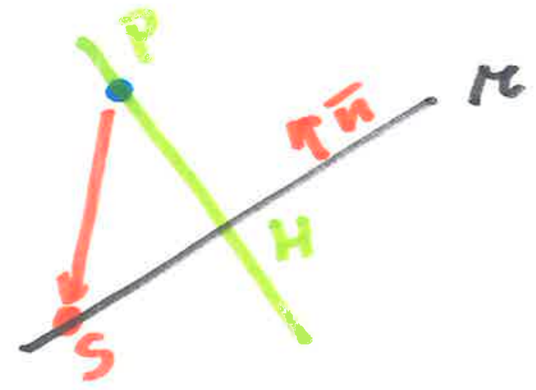
$a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$.

In particolare $W^\perp = \mathcal{L}((a_1\ a_2 \dots a_n))$

⌈ I coeff. della eq. omogenea di W identificano la direzione $W^\perp$ normale a W. ⌋

$n=2$ $\quad r: ax+by+c=0$ $\quad$ param. direttori $(-b, a)$

$\vec{n} = \mathcal{L}((a, b))$



$r: ax+by+c=0$

$P=(x_P,y_P)$

$d(P,r) := \|\overrightarrow{PH}\|$

Sia $S \in r$ un qualsiasi punto e consideriamo $\overrightarrow{PS}$.

$S=(x_S,y_S)$

$\bar{n}=(a,b)$

Osserviamo che $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH}+\overrightarrow{HS}$.

In particolare $\overrightarrow{PH}$ è la proiezione di $\overrightarrow{PS}$ nella direzione $\vec{n}$ normale alla retta r

$$\overrightarrow{PH} = \frac{\overrightarrow{PS}\cdot\bar{n}}{\bar{n}\cdot\bar{n}}\,\bar{n} = \frac{(x_S-x_P,\,y_S-y_P)\cdot(a,b)}{(a,b)\cdot(a,b)}\,(a,b)$$

$$\vec{PH} = \frac{a(x_S - x_P) + b(y_S - y_P)}{a^2+b^2}(a,b) =$$

$S \in r \Rightarrow$
$a x_S + b y_S + c = 0$

$$= \frac{\overbrace{a x_S + b y_S}^{=-c} - a x_P - b y_P}{a^2+b^2}(a,b) =$$

$$= \frac{-(a x_P + b y_P + c)}{a^2+b^2}(a,b).$$

$$d(P,r) = \|\vec{PH}\| = \frac{|a x_P + b y_P + c|}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{|a x_P + b y_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

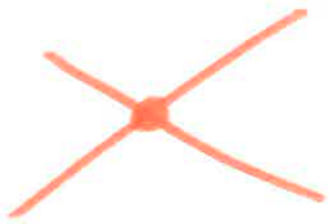
$$d(P,\pi) = \frac{|a_1 x_{P,1} + \dots a_n x_{P,n} + b|}{\sqrt{\sum a_i^2}}$$

distanza punto/iperpiano.

$P = (x_{P1} \dots x_{Pn})$

$\pi : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0.$

DISTANZA FRA 2 SOTTOSPAZI <u>DISGIUNTI</u>



$d = 0$???

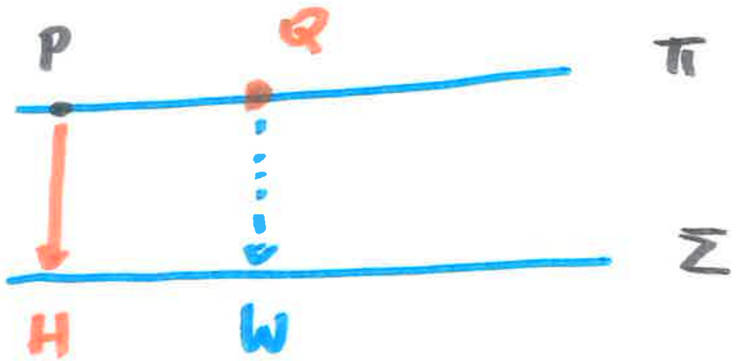
$d(\pi, \Sigma) := \min\{d(P,Q) : P \in \pi, Q \in \Sigma\}$.

<u>OSS</u>: Siano π e Σ due sottospazi paralleli con medesima dimensione.

$\forall P, Q \in \pi : d(P, \Sigma) = d(Q, \Sigma)$.

$\pi = [P, \mathcal{U}]$

$\Sigma = [H, \mathcal{U}]$



H proiezione $\perp$ di π su Σ

W proiezione $\perp$ di Q su Σ

$\vec{QW} = \vec{PH}$ $\qquad$ $\vec{PQ} \in \mathcal{U}$ $\quad$ $\vec{PH} \in \mathcal{U}^\perp$

consideriamo $P + \vec{PQ}$ e $H + \vec{PQ}$

$W = H + \overrightarrow{PQ} \in \Sigma$ perché Σ ha lo stesso sott. di traslazione di π.

$\Rightarrow$ consideriamo il vettore $\overrightarrow{QW}$

$$\overrightarrow{QW} = \cancel{(P+\overrightarrow{PQ})\ (H+\overrightarrow{PQ})} =$$

$$= \cancel{(Q-P)+}$$

$$\overrightarrow{(P+\overrightarrow{PQ})(H+\overrightarrow{PQ})} =$$

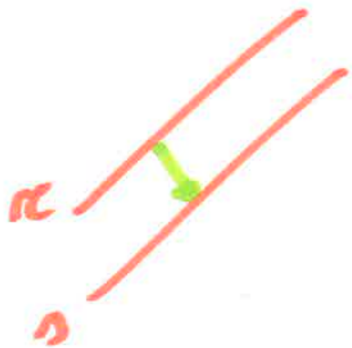
$$= \overrightarrow{(P+\overrightarrow{PQ})(P+\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{PQ})} =$$

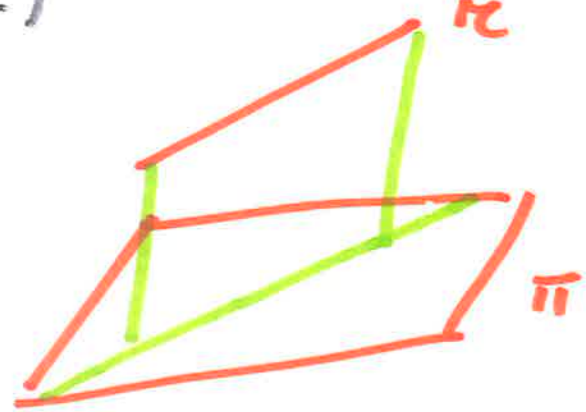
$$= [(P+\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{PQ}) - (P+\overrightarrow{PQ})] = \overrightarrow{PH} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{QW} \perp \mathcal{U} \quad e \quad \|\overline{QW}\| = \|\overline{PH}\| \Rightarrow d(P,\Sigma) = d(Q,\Sigma) \quad \square$$

Siano $\Pi = [P; \mathcal{U}]$ e $\Sigma = [Q; W]$ paralleli con $\mathcal{U} \subseteq W$

$\Rightarrow \forall R, S \in \Pi : d(R, \Sigma) = d(S, \Sigma)$





distanza fra due $\left\langle \begin{matrix} \text{rette} \\ \text{piani} \end{matrix} \right\rangle$ paralleli = dist. di un punto dell'una dall'altro spazio.

distanza fra una retta ed un piano ad essa parallelo

= distanza di un punto della retta dal piano

= distanza fra la retta e la sua proiez. ort. sul piano

COSA ACCADE CON RETTE SGHEMBE? r, s

esistono esattamente $P \in r$, $Q \in s$ tali che $d(P, Q)$ sia minima.

I punti sono tali che la retta per P e Q è ortogonale sia ad r che ad s e tale retta è detta retta di minima distanza fra r ed s.

<u>OSS:</u> 1) Se r ed s sono rette sghembe $\Rightarrow$ $\exists$ due piani π e σ con $r \subseteq \pi$ e $s \subseteq \sigma$ e $\pi // \sigma$.

$r = [P; W_1]$ $\pi = [P; W_1 + U_1]$

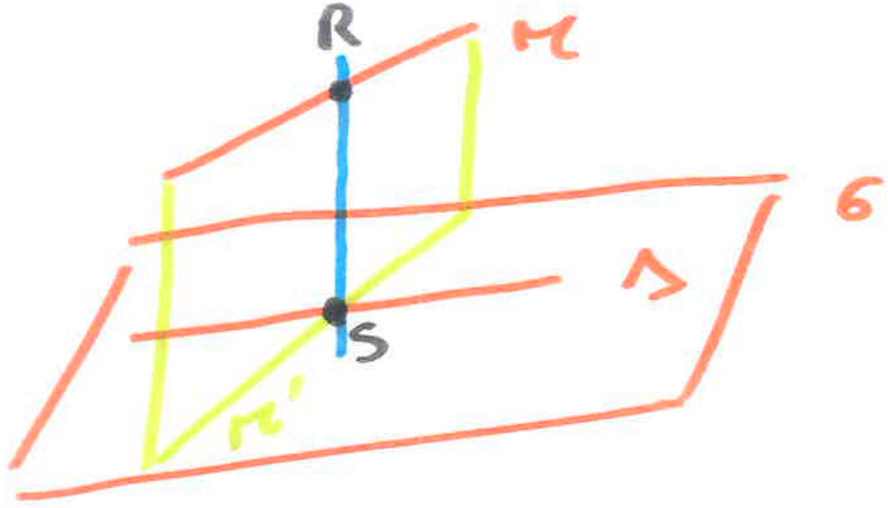
$s = [Q; U_1]$ $\sigma = [Q; W_1 + U_1]$

2) NON $\exists$ un piano che contiene sia r che s.
Infatti se $r \cap s = \emptyset$ e r ed s sono complanari
$\Rightarrow r \parallel s$.
[Un piano che contiene r ed s deve avere nella giacitura U_1, W_1 e $\mathcal{L}(\vec{PQ})$
ma $\dim U_1 + W_1 + \mathcal{L}(\vec{PQ}) = 3$ ↯]

3) la distanza fra r ed s è ~~minore~~ maggiore o uguale alla distanza fra r e σ

$$d(r,s) \geq d(r,\sigma) \geq d(\pi,\sigma)$$

4) d'altro canto la distanza fra r ~~e~~ e σ è uguale alla distanza fra r e la sua proiezione ortogonale r' su σ



5) r' è una retta di σ che non è parallela ad s (è parallela ad r!)
$\Rightarrow r'$ interseca s in un punto S.

6) $\cancel{d(r,S) \geq d(r,\sigma)}$
$d(S,r) \geq d(r,s)$ ma $d(S,r) = d(r,\sigma) \leq d(r,s)$
$\Rightarrow d(S,r) = d(r,s)$

7) consideriamo la proiezione ortogonale R di S su r
$\Rightarrow d(R,S) = d(S,r) = d(r,s)$

8) $\overrightarrow{RS}$ è ortogonale a $\sigma \Rightarrow \overrightarrow{RS}$ è ortogonale sia ad u_1 che a w_1.

⇒ 9) la retta per R ed S è

a) incidente sia r che s.

b) ortogonale sia ad r che ad s.

c) passa per i punti R ed S che sono i 2 punti di r ed s a minima distanza.

<u>N.B</u> tale retta è unica; infatti essa deve essere contenuta nell'intersezione del piano per r ortogonale a σ con il piano per s ortogonale a σ. (e deve passare per $r' \cap s'$!).