Geometria Affine

Ambiente in cui si rappresentano le sol. dei sistemi lineari compatibili.

[$AX = B$ con n incognite $rk(A) = rk(A|B) = k$] $\longleftrightarrow$ [sottospazi affini di $AG(n, \mathbb{K}) = A_n(\mathbb{K})$ di dimensione $n-k$]

a meno di fissare un riferimento affine $\rightarrow$ coordinate cartesiane.

oss 1) Un iperpiano di $AG(n, \mathbb{K})$ corrisponde all'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di 1 equazione.

2) Siano $\Pi = [P, W]$ e $\Sigma = [Q, U]$ due sottospazi affini $\Rightarrow$

a) $\Pi \cap \Sigma = \emptyset$ oppure

b) $\Pi \cap \Sigma$ è un sottospazio affine del tipo $[R; W \cap U]$.

DIM: Supponiamo $\Pi \cap \Sigma \neq \emptyset$ sia $R \in \Pi \cap \Sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, Q \in [R; W \cap U]$ si ha $Q \in [R, W] = \Pi$
$Q \in [R, U] = \Sigma$

$\Rightarrow Q \in \Pi \cap \Sigma$.

Viceversa: $X \in \Pi \cap \Sigma \Rightarrow \vec{RX} \in W,\ \vec{RX} \in U \Rightarrow$

$\Rightarrow X \in [R; W \cap U]$ $\square$

3): Se $AX = B$ definisce Π e $A'X = B'$ definisce $\Sigma \Rightarrow$

$$\left(\frac{A}{A'}\right) X = \left(\frac{B}{B'}\right) \quad \text{definisce } \pi \cap \Sigma.$$

- rette → sottospazi affini di dim = 1
- piani → sottospazi affini di dim = 2

rette: 1) per ogni 2 punti distinti passa una ed una sola retta.

2) se $n=2$ (nel piano) due rette disgiunte sono parallele.

1) si può dimostrare se $n=2$ ragionando sui sistemi.

$ax+by+c=0$ → eq. in 3 parametri (a,b,c)

ma parametri proporzionali danno la stessa retta $\Rightarrow$ $\forall$retta nel piano ha ∞^1 ~~rette~~ equazioni.

$\rightarrow$ per avere ∞^2 eq. ci servono 2 cond. lineari.

$r = [P; W_1]$ con $\dim W_1 = 1$

e che $\forall Q \in r$ si deve avere $\vec{PQ} \in W_1$

$\Rightarrow$ dati 2 punti $\underset{P \neq Q}{P, Q}$ l'unica retta che li contiene entrambi é $[P; \mathcal{L}(\vec{PQ})]$.

Siano $P = (x_P, y_P)$ $Q = (x_Q, y_Q)$ $n=2$

r per P, Q ha equazione $\begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P \\ x_Q - x_P & y_Q - y_P \end{vmatrix} = 0$

che si può anche riscrivere come

eq. sotto forma di rapporti uguali

$$\boxed{\frac{x-x_P}{x_Q-x_P} = \frac{y-y_P}{y_Q-y_P}} \qquad x_Q \neq x_P\,,\ y_Q \neq y_P$$

$$(x-x_P)(y_Q-y_P) = (y-y_P)(x_Q-x_P) \qquad (*)$$

$x_Q = x_P$ si legge come $x = x_P$

$y_Q = y_P$ si legge come $y = y_P$

N.B. se $n > 2$ si può ancora descrivere una retta mediante "uguaglianze di rapporti".

$n=3$ $\quad P = (x_P, y_P, z_P)$

$Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x-x_P & y-y_P & z-z_P \\ x_Q-x_P & y_Q-y_P & z_Q-z_P \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} (x-x_P)(y_Q-y_P)=(y-y_P)(x_Q-x_P) \\ (x-x_P)(z_Q-z_P)=(z-z_P)(x_Q-x_P) \\ (y-y_P)(z_Q-z_P)=(z-z_P)(y_Q-y_P) \end{cases}$$

$$(*) \quad \frac{x-x_P}{x_Q-x_P}=\frac{y-y_P}{y_Q-y_P}=\frac{z-z_P}{z_Q-z_P}$$

2 indip

se $z_Q=z_P \Rightarrow$ la corrispondente eq. si legge come $z=z_P$

i denominatori di (*)

$(x_Q-x_P,\ y_Q-y_P,\ z_Q-z_P)$ sono le componenti di un vettore non nullo nello spazio di traslazione (= direzione) della retta $\Rightarrow$ parametri direttori della retta.

$$(\ell, m, n) = (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P).$$

[idem per $n=2$]

$P = (x_1' \dots x_n')$

$Q = (x_1'' \dots x_n'')$

$$rk \begin{pmatrix} x_1 - x_1' & \dots & x_n - x_n' \\ x_1'' - x_1' & \dots & x_n'' - x_n' \end{pmatrix} = 1$$

$$\frac{x_1 - x_1'}{x_1'' - x_1'} = \frac{x_2 - x_2'}{x_2'' - x_2'} = \dots = \frac{x_n - x_n'}{x_n'' - x_n'}$$

3) Ogni retta ha tanti punti quanti sono gli elementi di $\mathbb{K}$

[in generale se $|\mathbb{K}| = \infty \Rightarrow$ una retta ha infiniti punti]

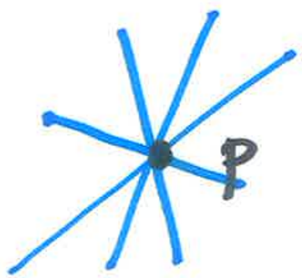
Fascio e stella di rette.

Fascio $\rightarrow$ collezione di ∞^1 oggetti

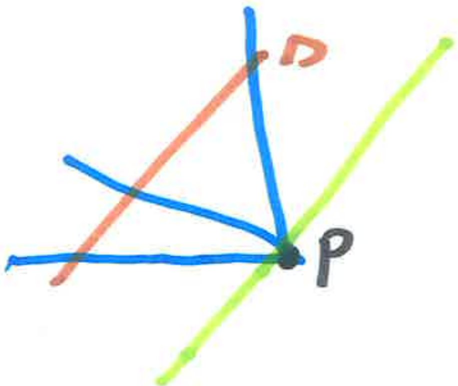
Stella $\rightarrow$ collezione di ∞^2 oggetti.

$n = 2$: Si dice fascio

- proprio di rette l'insieme di tutte le rette che passano per un punto
- improprio di rette l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data.



(e,b)



dato P punto, s retta con $P \notin s$ $\Rightarrow$ $\forall$ punto $Q \in s$ $\exists!$ retta $\overline{PQ}$ passante per P e Q.

inoltre $\exists!$ retta passante per P e che non interseca s (la parallela ad s per P) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ # rette per P = $\left[\begin{array}{c} \#\text{punti di } s \\ + \\ 1 \end{array}\right]$

prendete una qualsiasi retta s non di direzione $\mathcal{L}((l,m))$. Allora ogni retta di direzione $\mathcal{L}((l,m))$ interseca tale retta in un punto e viceversa dato un punto su s si trova una e una sola retta di dir. (l,m) per esso.

$\Rightarrow$ # rette di direzione (l,m) = # punti di s

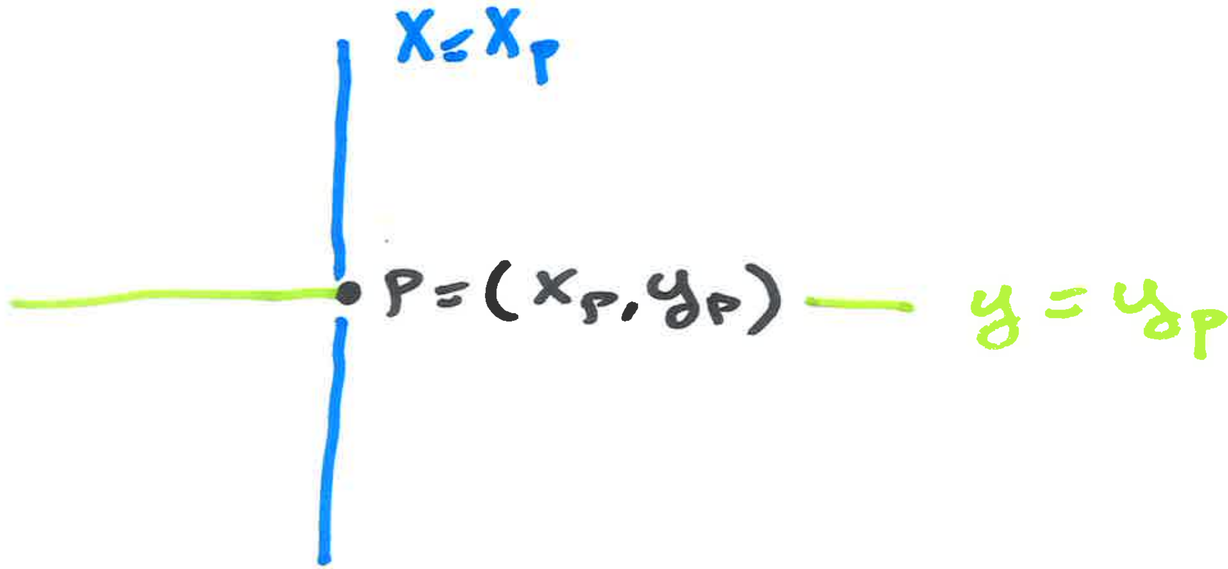
le equazioni del fascio di rette per il punto $(x_P, y_P) = P$ sono del tipo

$$\alpha(x - x_P) = \beta(y - y_P) \qquad r_{\alpha,\beta}$$

supponiamo $Q \neq P \Rightarrow$ mostriamo che $\exists (\alpha,\beta)$ tali che $Q \in r_{\alpha,\beta}$ $\qquad \alpha(x_Q - x_P) = \beta(y_Q - y_P)$

se $x_Q - x_P = 0 \Rightarrow \beta = 0,\ \alpha = 1$

altrimenti $\alpha = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P},\ \beta = 1$



più in generale: siano

$$r: ax + by + c = 0$$

$$s: a'x + b'y + c' = 0$$

le equazioni di 2 rette distinte passanti per un punto $P = (x_P, y_P) \Rightarrow$

le equazioni del fascio proprio di rette per P sono della forma

$$\alpha(ax+by+c)+\beta(a'x+b'y+c')=0 \quad (\alpha,\beta) \neq (0,0)$$

$\alpha=0 \rightarrow s: a'x+b'y+c'=0$

$\alpha\neq0 \rightarrow (ax+by+c)+\gamma(a'x+b'y+c')=0$

con $\gamma=\beta/\alpha$).

<u>DIM</u>: Sia Q un punto $\neq P \Rightarrow Q=(x_Q,y_Q)$

$$\alpha(ax_Q+by_Q+c)+\beta(a'x_Q+b'y_Q+c')=0$$

se $ax_Q+by_Q+c=a'x_Q+b'y_Q+c'=0 \Rightarrow Q\in r\cap s \Rightarrow Q=P$ ↯

se $ax_Q+by_Q+c=0 \Rightarrow (\alpha,0)$ e la retta è r

altrimenti:

$$\frac{\alpha}{\beta} = - \frac{a'x_Q+b'y_Q+c'}{ax_Q+by_Q+c}$$ ed otteniamo la retta per P e Q.

Fascio improprio: (ℓ, m) direzione.

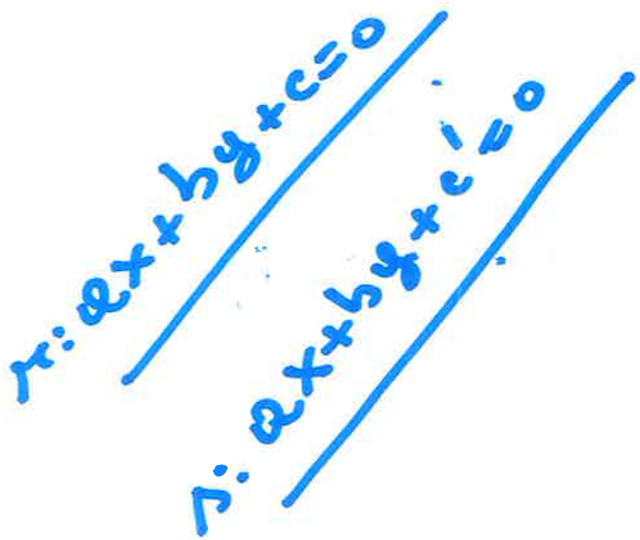
$\Rightarrow$ voglio tutte le rette con dir. // ad (ℓ, m).

$\rightarrow a\ell + bm = 0$

in particolare una soluzione non nulla è

$(a,b) = (-m, \ell)$

$\Rightarrow -mx + \ell y + k = 0$ con $k \in \mathbb{K}$



generica retta del fascio improprio ha eq.

$$\alpha(ax+by+c)+\beta(ax+by+c')=0$$

$$(\alpha,\beta)\neq(0,0).$$

$n=2$

$a: ax+by+c=0$

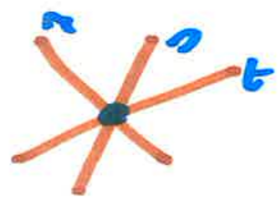
$s: a'x+b'y+c'=0$

$t: a''x+b''y+c''=0$

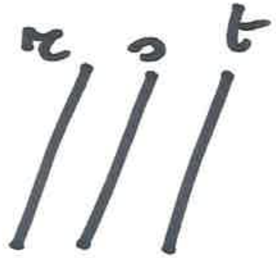
$AX=B$

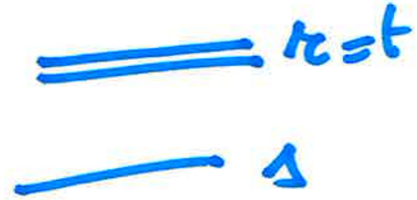
- ∞^1 sol $\Rightarrow r=s=t$

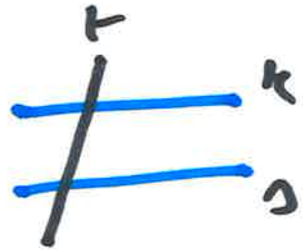
- 1 sol $\Rightarrow$



• 0 soluzioni.





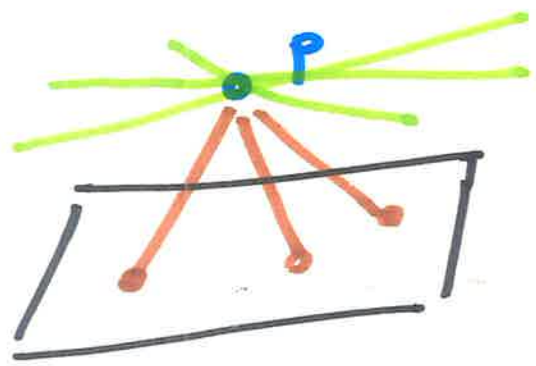


sistemi omogenei ~~di~~ dati da 2 rette hanno sempre rk=2

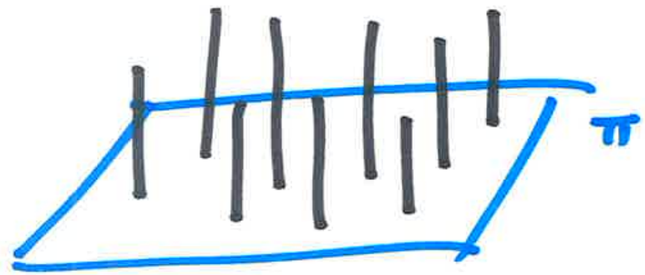
le tre rette sono a 2 a 2 parallele e distinte

[sist. om → rk=1
sistemi non om. a 2 a 2 hanno rango 2]

<u>n=3</u>: per un punto passano ∞^2 rette.



Def.: Si dice stella propria di rette in $AG(3,\mathbb{K})$ l'insieme di tutte le rette che passano per un punto; stella impropria l'insieme di tutte le rette che hanno una direzione assegnata.



piani in $AG(3, \mathbb{K})$.

1) Un piano in $AG(3, \mathbb{K})$ è un iperpiano perché ha dim $3-1=2$.

2) Per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano.

$$\pi = [P : \mathcal{L}(\vec{PQ}, \vec{PR})]$$

3) Un piano per 3 punti è descritto in coordinate da una equazione di I grado.

$X = (x, y, z) \in \pi$ con π piano per il punto $(x_P, y_P, z_P) = P$ ed avente giacitura (= sott. di traslazione) generata da $(a,b,c), (d,e,f)$

$$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{PX} \in \mathcal{L}((a,b,c),(d,e,f))$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x - x_P \;\; y - y_P \;\; z - z_P) \in \mathcal{L}((a,b,c),(d,e,f))$$

$$\Longleftrightarrow \quad \operatorname{rk}\begin{pmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 2 = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

piano per 3 punti

$P = (x_P, y_P, z_P)$

$Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$

$R = (x_R, y_R, z_R)$

$\overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P)$

$\overrightarrow{PR} = (x_R - x_P, y_R - y_P, z_R - z_P)$

l'equazione diventa

$$\begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \\ x_R - x_P & y_R - y_P & z_R - z_P \end{vmatrix} = 0 \qquad (*)$$

$$(x - x_P, y - y_P, z - z_P) \cdot \left[(x_Q - x_P \;\; y_Q - y_P \;\; z_Q - z_P) \times (x_R - x_P, y_R - y_P, z_R - z_P) \right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_P & y_P & z_P & 1 \\ x_Q & y_Q & z_Q & 1 \\ x_R & y_R & z_R & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (*')$$

ANCHE PER LE RETTE NEL PIANO:

$$\begin{vmatrix} x-x_P & y-y_P \\ x_Q-x_P & y_Q-y_P \end{vmatrix} = 0$$ è equivalente a

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

posizione reciproca di 2 piani in $AG(3, \mathbb{K})$.

$\pi: ax + by + cz + d = 0 \qquad (a, b, c) \neq (0\,0\,0)$

$\sigma: a'x + b'y + c'z + d' = 0 \qquad (a'\,b'\,c') \neq (0\,0\,0)$

$AX = B$.

$\pi /\!/ \sigma$

rk A	rk $(A \mid B)$	# sol	
1	1	∞^2	$\pi = \sigma$
1	2	0	$\pi /\!/ \sigma$
2	2	∞^1	$\pi \cap \sigma = r$ retta.

i sistemi omogenei sono eq.
$\Rightarrow$ stessa giacitura
$\Rightarrow \pi /\!/ \sigma$; $\pi \neq \sigma$

posizione reciproca di un piano ed una retta in $AG(3, \mathbb{K})$

$$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \quad r=[P; W_1]$$

$$\pi: \; a''x+b''y+c''z+d''=0 \qquad (a'', b'', c'') \neq (0\,0\,0) \quad \pi=[Q; U_2]$$

$$AX=B$$

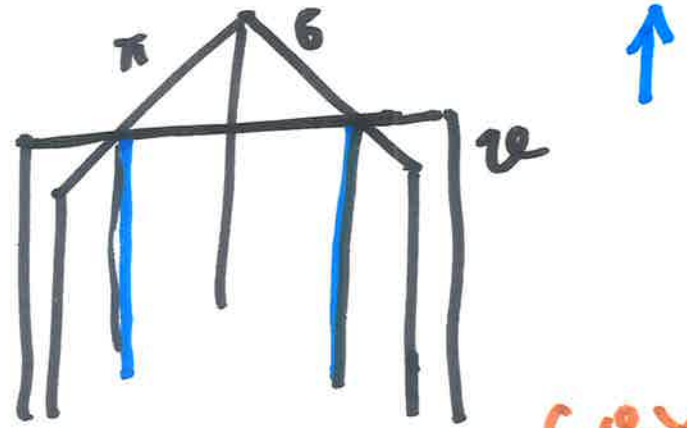
	$rk(A)$	$rk(A\|B)$	#	
	2	2	∞^1	$r \subseteq \pi$
$r // \pi$	2	3	0	$\forall$ sol. del sistema omogeneo di r è sol. dell'eq. omogenea di $\pi \Rightarrow W_1 \subseteq U_2 \Rightarrow r // \pi$
	3	3	1	$\pi \cap r = \{P\}$

Teorema: Ogni retta interseca un piano non parallelo ad essa in esattamente 1 punto in $AG(3,\mathbb{K})$.

Def: Sia r una retta in $AG(3,\mathbb{K})$. Si dice <u>fascio</u> (proprio) di piani di sostegno la retta r l'insieme di tutti i piani passanti per r.

Si dice <u>fascio improprio</u> di piani, l'insieme di tutti i piani aventi una giacitura assegnata (= piani paralleli ad un piano dato).

Si dice stella propria di piani l'insieme di tutti i piani che passano per un punto assegnato; stella impropria di piani tutti i piani che hanno una direzione in comune assegnata.



OSS: Sia r_0 una retta di eq. $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

Il generico piano del fascio proprio di sostegno r_0

ha equazione

$$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0.$$

$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ $\quad$ $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2.$