Geometria

Def di Spazio Affine (proprietà di incidenza)

↓

di Spazio Euclideo (+ nozione di distanza Euclidea)

per studiare meglio la geometria serve estendere questi ambienti

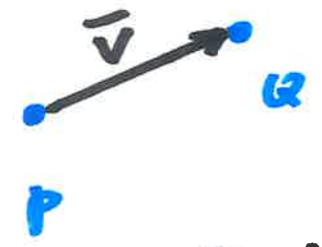
- ampliamento proiettivo
- complessificazione.

$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

punti e rette

Def: Una geometria affine $AG(V)$ e V è sp. vettoriale è una terna (A, V, f) ove

- A è un insieme (detto insieme dei punti).
  $A \neq \emptyset$
- V è uno sp. vettoriale $V(\mathbb{K})$ su di un campo $\mathbb{K}$
- $f: A \times A \to V$



tale che

1) $\forall P \in A \ \forall \bar{v} \in V(\mathbb{K}) : \exists! \, Q \in A : f(P,Q) = \bar{v}$

$f(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$

In tale caso si dice che Q è il traslato di P secondo il vettore $\bar{v}$ e

scriverò $Q = P + \bar{v}$

↳ vettore.

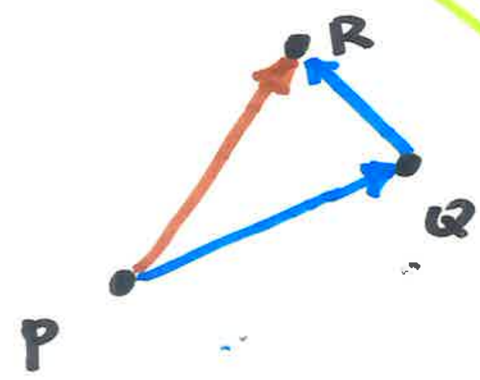
↳ punto

$+: A \times V \to A$

⌈Dato un punto P ed un vettore $\bar{v}$ $\exists!$ traslato Q di P con $\bar{v}$⌋

3) $\forall P, Q, R$: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

somma di vettori in $V(\mathbb{K})$



La dimensione di $AG(V)$ è per definizione la dimensione dello spazio vettoriale V soggiacente.

OSS:

1) $\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \iff P = Q.$

2) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

3) $\exists$ una biiezione fra A e V
(in particolare ha senso dire che la $\dim V =: \dim A$)

DIM. 1) $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} \Rightarrow \overrightarrow{PP} = \underline{0} \quad \forall P \in A$

se $Q = P + \underline{0} \Rightarrow$ per l'unicità del traslato $Q = P$.

2) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \underline{0} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

3) Sia $O \in A$. Allora $\forall \bar{v} \in V \, \exists! \, g(\bar{v})$ tale che $g(\bar{v}) = O + \bar{v}$

$$g : \begin{cases} V \to A \\ \bar{v} \to O + \bar{v} \end{cases}$$

é una funzione iniettiva.

Osserviamo che $\forall P \in A$ il vettore $\overrightarrow{OP} \in V$ perché $\overrightarrow{OP} = f(O,P)$ e $g(\overrightarrow{OP}) = O + \overrightarrow{OP} = P$

$\Rightarrow g$ è suriettiva. $\Rightarrow g$ è biiettiva #

<u>Sottospazio affine</u>: Se (A, V, f) sp. affine un sottospazio A' é un sottoinsieme $\neq \emptyset$ di A $A' \subseteq A$ tale che

$f|_{A'\times A'} : A' \to W$ sia una funzione

a valori in uno s. vettoriale $W \leq V$

tale che valgano le 2 proprietà 1) e 2)

di prima (in particolare $\forall \bar{w} \in W \; \forall P \in A'$

$\bar{w} + P \in A'$).

Def: Sia (A, V, f) uno spazio affine.

$P \in A$, $W \leq V$

si dice sottospazio lineare di origine P

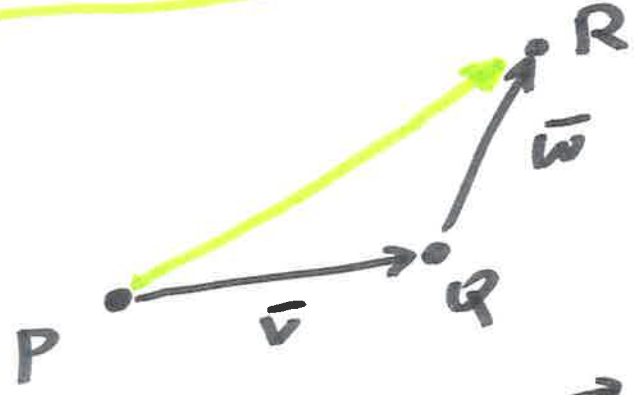
e spazio di traslazione W l'insieme

$[P; W] = \{P + \bar{w} \mid \bar{w} \in W\}. = P + W$

<u>OSS</u>:

Sia $P \in A$, $\bar{v}, \bar{w} \in V \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{(P+\bar{v})+\bar{w} = P+(\bar{v}+\bar{w})}$$



$\cancel{P+}(\ \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$ $\cancel{= ((P+\bar{v})+\bar{w}}$

$(P+\bar{v})+\bar{w} = R = P+\vec{PR} = P+(\bar{v}+\bar{w})$.

Teorema: I sottospazi affini di $AG(V)$ sono tutti e soli i suoi sottospazi lineari.

DIM: Sia $X = [P; W]$ un sott. lineare $\Rightarrow$

$(X; W; f^{|W}_{|X \times X})$ é un sottospazio affine.

dobbiamo solo far vedere che $\forall \bar{w} \in W$ $\forall R \in X$

$$P + \bar{w} \in X$$

Sia $\bar{w} \in W \Rightarrow \exists$ ~~quello tale che $\overrightarrow{PQ}$~~

$Q \in X : \overrightarrow{PQ} = \bar{w}$.

consideriamo ora $R \in X \Rightarrow \exists \bar{w}' \in W$

tale che $\overrightarrow{PR} = \bar{w}'$.

$$R+\bar{w} \in X$$

$R = P + \bar{v}$ con $\bar{v} \in V$

$\Rightarrow R+\bar{w} = (P+\bar{v})+\bar{w} =$

$= P + (\bar{v}+\bar{w})$

con $\bar{v}, \bar{w} \in W \Rightarrow R+\bar{w} =$ traslato di P con un vettore di $W \Rightarrow$

$\Rightarrow R+\bar{w} \in [P; W]$.

Un sottospazio lineare è un sottospazio affine.

Viceversa: Sia (A', W, f') un sottospazio affine $\Rightarrow A' = [P; W]$ per ogni punto $P \in A'$.

[DIM: segue dal fatto che la funzione

$$g_P : \begin{cases} W \to A \\ \bar{w} \to P + \bar{w} \end{cases}$$

è una biiezione se (A', W, f') è sottosp. affine.]

#

<u>OSS</u>: 1) Sia $[P; W]$ un sott. lineare $\Rightarrow$

$\Rightarrow [P; W] = [Q; W] \quad \forall Q \in [P; W]$

Sia $R \in [P; W] \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} \in W$ ma $\overrightarrow{PQ} \in W \Rightarrow -\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP} \in W \Rightarrow \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QR} \in W \Rightarrow R \in [Q; W] \Rightarrow$

$\Rightarrow [P;W] \subseteq [Q;W]$.

Scambiando P e Q: $[Q;W] \subseteq [P;W]$

$\Rightarrow [P;W] = [Q;W]$.

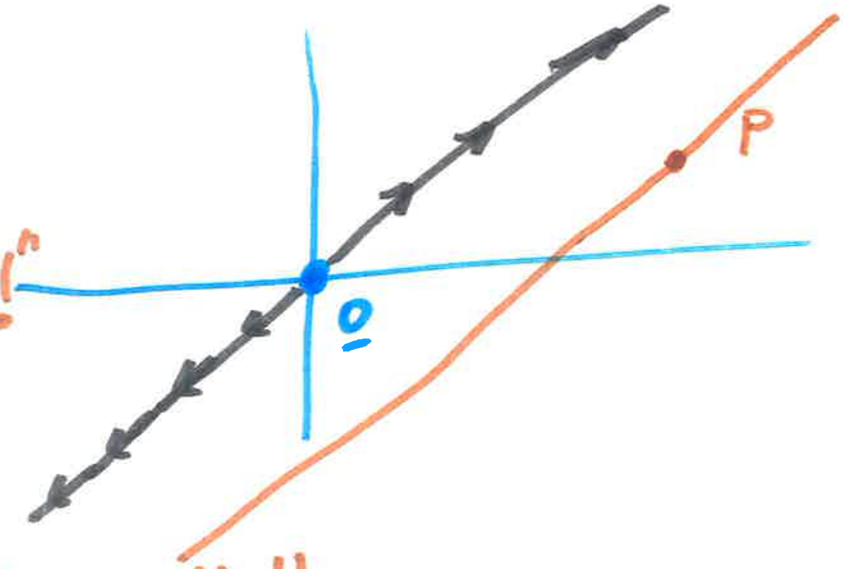
Def: Si dice dimensione di un sottospazio lineare la dimensione del corrispettivo spazio di traslazione.

$$AG(n, \mathbb{K}) = AG(V_n(\mathbb{K}))$$

n	$[P;W]$	W
0	punto	$\{0\}$.
1	retta	direzione
2	piano	giacitura
3	solido	
$n-1$	iperpiano	

In particolare una <u>retta</u> è un sottospazio lineare $[P; W_1]$ ove $\dim W_1 = 1$

In altre parole una <u>retta</u> è l'insieme di tutti i punti ottenuti traslando un suo punto qualsiasi P secondo i vettori di uno sp. vett. di dimensione 1



⚠ NON DIRE "retta = insieme di punti allineati!"

si dice che 3 punti sono allineati se stanno su di una stessa retta!!

Teorema: In $AG(n, \mathbb{K})$ per 2 punti distinti passa una ed una sola retta.

DIM: $P, Q \in A \quad P \neq Q$.

poniamo $r_0 = [P; \mathcal{L}(\vec{PQ})]$

è una retta perché $\exists$ dim $\mathcal{L}(\vec{PQ}) = 1$

e $P, Q \in r_0$ in quanto $\vec{PQ} \in \mathcal{L}(\vec{PQ})$.

supponiamo $r' =$ retta che contiene P, Q.

$r' = [S; W_1] = [P; W_1]$ perché $P \in r'$

e $\vec{PQ} \in W_1$ in quanto $Q \in r'$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\vec{PQ}) \leq W_1$ e siccome dim $W_1 = 1$

$\mathcal{L}(\vec{PQ}) = W_1 \Rightarrow r_0 = r'$ $\square$.

⚠ **Def**: 3 punti P, Q, R sono <u>allineati</u> se sono sulla stessa retta.

Riferimento affine e coordinate

$$AG(V) = (A, V, f)$$

$$\Gamma = (O, \mathcal{B})$$

- $\mathcal{B}$ → base di $V(\mathbb{K})$
- $O \in A$ origine
- Γ → riferimento affine

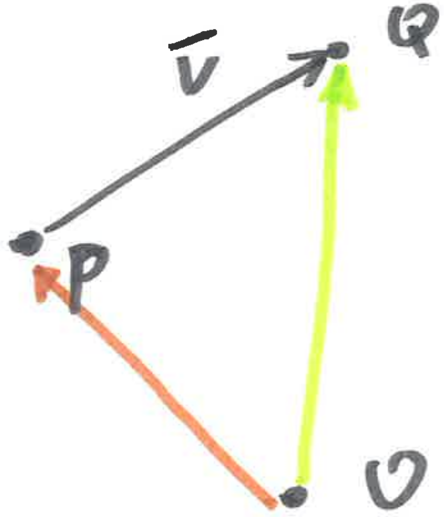
Dato un punto $P \in A$ chiamiamo <u>coordinate</u> di P rispetto a Γ le componenti del vettore $\vec{OP}$ rispetto la base $\mathcal{B}$ di Γ.

$$\psi_\Gamma : \begin{cases} A \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P \longrightarrow (p_1 \dots p_n) \text{ ove } \overrightarrow{OP} = p_1\bar{e}_1 + \dots + p_n\bar{e}_n \end{cases} \qquad \mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n).$$

<u>OSS</u>: Sia $P \in A$ e $\bar{v} \in V$. Supponiamo di avere un riferimento affine Γ e che $(p_1, p_2 \dots p_n)$ siano le <u>coordinate</u> di P rispetto a Γ

$(v_1 \dots v_n)$ siano le <u>componenti</u> di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$

$\Rightarrow$ le coordinate del ~~nel~~ punto $Q = P + \bar{v}$ sono date da $(p_1 \dots p_n) + (v_1 \dots v_n) = (p_1 + v_1 \dots p_n + v_n)$.



$Q = P + \bar{v}$

$\overrightarrow{OQ} = \sum q_i \bar{e}_i$

$\overrightarrow{OP} = \sum p_i \bar{e}_i$

$\bar{v} = \sum v_i \bar{e}_i$

coordinate di Q = componenti di $\overrightarrow{OQ}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

md $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$

e ~~coord~~ comp. di $\overrightarrow{OP} = (p_1 \dots p_n)$

comp. di $\overrightarrow{PQ} = (v_1 \dots v_n)$

$\Rightarrow$ comp. di $\overrightarrow{OQ} = (p_1+v_1 \dots p_n+v_n)$.

Fissato Γ noi possiamo identificare in

$$
\begin{tikzcd}
(A, & V_n(\mathbb{K}), & f) \arrow[d, bend left] \\
(\mathbb{K}^n, \arrow[u, leftarrow, "\text{coord.}"'] & \mathbb{K}^n, \arrow[u, leftarrow, "\text{componenti}"'] & g)
\end{tikzcd}
$$

siano $P, Q \in A$ $\quad (p_1 \dots p_n)$
$\qquad (q_1 \dots q_n)$

componenti di $\overrightarrow{PQ} = (v_1 \dots v_n)$ tali che

$$(p_1 \dots p_n) + (v_1 \dots v_n) = (q_1 \dots q_n)$$

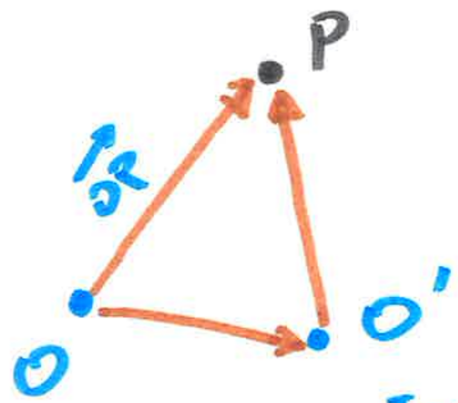
$$\Rightarrow (v_1 \dots v_n) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2 \dots q_n - p_n).$$

⚠ $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ $\qquad P + \overrightarrow{PQ} \cancel{= P + Q} - P = Q$

CAMBIAMENTI DI RIFERIMENTO.

$$\Gamma = (O, \mathcal{B})$$

$$\Gamma' = (O', \mathcal{B}')$$



$$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$$

$$\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$$

se ${}^T[\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n] =$

$$\begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n] X$$

$$\overrightarrow{OO'} = [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n] Y$$

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n][X - Y]$$

$$= [\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n] X' \Rightarrow$$

$$[\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n]\, X' = [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n]\, {}^T\!A\, X'$$

$$= [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n]\, [X - y]$$

$$\Rightarrow X' = {}^T\!A^{-1}(x - y)$$

Equazioni e sottospazi lineari.

- $AG(n, \mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, -)$ $\qquad \vec{PQ} = Q - P$

Supponiamo di avere un sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite $\Rightarrow$ S insieme delle soluzioni può essere considerato come un sottoinsieme di punti di $AG(n, \mathbb{K})$ $\rightarrow$ punti con coordinate in S.

$\Rightarrow S$ è un sottospazio affine/lineare di $A_G(n, \mathbb{K})$.

↳ ABBIAMO VISTO CHE se il sistema è $AX = B$

$\Rightarrow S = X_0 + Ker(A)$ e $Ker(A) \leq \mathbb{K}^n$

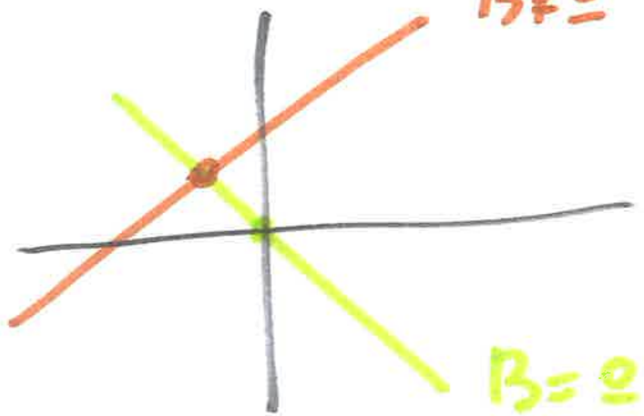
$\Rightarrow$ come sp. lineare vediamo $\dot{S} = [X_0 ; Ker(A)]$

↑ origine   ↘ sott. di traslazione

l'insieme S coincide con l'insieme delle coordinate dei punti di $\dot{S}$

In particolare S è sott. vettoriale $\Leftrightarrow \underline{0} \in S \Leftrightarrow B = \underline{0}$

In tale caso $\dot{S}$ è un sott. lineare che passa per l'origine del riferimento affine.



Equazioni della retta nel piano $n=2$

$r = [P; \mathcal{L}(\bar{v})] \qquad W_1 = \mathcal{L}(\bar{v}).$

$= \{P + \bar{w} \mid \bar{w} \in \mathcal{L}(\bar{v})\} = \{P + \alpha \bar{v} \mid \alpha \in \mathbb{K}\} \Rightarrow$

passando in coordinate
e prendendo $n=2$

$r \rightarrow \{(x_P, y_P) + \alpha(l, m) \mid \alpha \in \mathbb{K}\}.$

$l\bar{e}_1 + m\bar{e}_2 = \bar{v}$

$$\Rightarrow \quad r \begin{cases} x = x_P + \alpha \ell \\ y = y_P + \alpha m \end{cases} \qquad (\ell, m): \text{parametri direttori.}$$

eq. parametrica della retta nel piano.

$$\begin{cases} x - x_P = \alpha \ell \\ y - y_P = \alpha m \end{cases} \rightarrow (x - x_P, y - y_P) \in \mathcal{L}((\ell, m))$$

$$\Updownarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P \\ \ell & m \end{vmatrix} = 0 \iff rk \begin{pmatrix} x - x_P & y - y_P \\ \ell & m \end{pmatrix} =$$

$$= rk \begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix} = 1$$

$$\boxed{m (x - x_P) = \ell (y - y_P)}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_{p_1} + \lambda v_1 \\ x_2 = x_{p_2} + \lambda v_2 \\ \vdots \\ x_n = x_{p_n} + \lambda v_n \end{cases}$$

$$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} x_1 - x_{p_1} & x_2 - x_{p_2} & \cdots & x_n - x_{p_n} \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = 1$$

$\downarrow$

per il teorema degli orlati serve che $(n-1)$ minori 2×2 abbiano det $= 0$

$\downarrow$

<u>Ok.</u> n incognite
$n-1$ eq. lin. indip $\longrightarrow \infty^1$ soluzioni.

#

Teorema: Esiste una corrispondenza biunivoca fra gli insiemi delle soluzioni dei sistemi lineari di rango K compatibili in n incognite ed i sottospazi affini di $AG(n, \mathbb{K})$ di dimensione $n-K$.

DIM: DATO $AX=B$ con $rk(A)=rk(A|B)=K$

E CHIAMATA X_0 una sua sol. particolare

CONSIDERIAMO IL SOTT. AFFINE I cui punti HANNO COORDINATE IN $X_0+\ker(A)$

Viceversa: sia $\Pi=[P;W]$ un sott. affine.

Siano $P=(p_1 \dots p_n)$ e $\mathcal{B}_W=(\bar{w}_1 \dots \bar{w}_{n-k})$ rispettivamente le coordinate di P e $\bar{w}_1 \dots \bar{w}_{n-k}$

i vettori delle componenti rispetto $\mathcal{B}$ di una base di W.

$$\Rightarrow Q \in \Pi \iff \overrightarrow{PQ} \in W$$

$$\iff (p_1 - q_1, \dots p_n - q_n) \in \mathcal{L}(\overline{w}_1 \dots w_{n-k})$$

$$\iff rk \begin{pmatrix} p_1 - q_1 & \dots & p_n - q_n \\ w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & & \\ w_{n-k\,1} & \dots & w_{n-k\,n} \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{n-k} \\ \vdots & & \\ w_{n-k\,1} & \dots & w_{n-k\,n} \end{pmatrix} =$$

$$= n - k$$

oss. che le ultime $(n-k)$ righe della matrice hanno un minore $(n-k) \times (n-k)$ con $\det \neq 0$ e che per avere la condizione sul rango serve che i suoi $n-(n-k) = k$ orlati:

abbiamo tutti det $= 0$.

$\Rightarrow (q_1 \dots q_n)$ deve soddisfare un sistema di k equazioni lineari in n incognite

$$rg \begin{bmatrix} p_1 - x_1 & \dots & p_n - x_n \\ w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n-k\,1} & \dots & w_{n-k\,n} \end{bmatrix} = n-k$$

$\square$

<u>Def</u>: Si dice che 2 sottospazi $\Pi = [P; W]$, $\Sigma = [Q; U]$ sono <u>paralleli</u> $\Leftrightarrow$ $W \subseteq U$ oppure $U \subseteq W$.

In particolare se $\dim U = \dim W \Rightarrow \Pi // \Sigma \Leftrightarrow U = W$.

$\rightarrow$ Due rette sono parallele $\Leftrightarrow$ esse hanno la stessa direzione.

<u>OSS</u>: Sia $AX=B$ un sistema lineare compatibile $\Rightarrow$ sia $S=[X_0; W]$ il sottospazio lineare ad esso associato. Allora W consta dei vettori le cui componenti sono in $\mathrm{Ker}(A)$, cioè dei vettori ~~che~~ le cui componenti risolvono il sistema omogeneo associato.

Siano $\Pi: AX=B$ e $\Sigma: A'X=B'$ due sottospazi affini

$\Leftrightarrow$ $\Pi /\!/ \Sigma$ se e solamente se $\mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(A')$ oppure $\mathrm{Ker}(A') \subseteq \mathrm{Ker}\,A$.

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow rk\begin{pmatrix} A \\ \hline A' \end{pmatrix} = rk(A)$ oppure $rk\begin{pmatrix} A \\ \hline A' \end{pmatrix} = rk(A')$

$\Leftrightarrow rk\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = \max(rk(A), rk(A'))$.

se $rk(A) = rk(A') \Rightarrow \pi // \Sigma \Leftrightarrow rk\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = rk(A) = rk(A')$.

$\rightarrow n=2$

<u>Teorema</u>: 1) Siano r, s due rette in $AG(2, \mathbb{K})$.
Allora se $r \cap s = \emptyset \Rightarrow r // s$.

<u>DIM</u>: Sia $r: ax + by = c$
$s: a'x + b'y = c'$
$\Rightarrow r \cap s = \emptyset \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$

è incompatibile $\Leftrightarrow rk(A) \neq rk(A|B)$

$rk(A) \geq 1 \qquad rk(A|B) \leq 2$

$\Rightarrow$ sistema incomp. $\Leftrightarrow$ $rk(A) = 1$
$rk(A|B) = 2$.

$rk(A) = 1 \Rightarrow$ $ax + by = 0$ è equivalente ad
$a'x + b'y = 0$

$\Longrightarrow$ lo spazio di traslazione = direzione di r
coincide con " " " " = direzione di s

$\Longrightarrow r // s$. $\square$

<u>CONSEGUENZA:</u> data r retta e P punto con $P \notin r$ nel piano $\exists!$ retta s con $s \cap r = \emptyset$ e tale retta s è parallela ad r.

oss: se $n=3$ la situazione è differente.

1) una retta è descritta da un sistema di 2 eq. di rango $=2$.

[3 incognite; ∞^1 sol. $\Rightarrow n-k=2$].

$$r\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad rk\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = rk\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{bmatrix} = 2$$

$$s\begin{cases} a''x+b''y+c''z+d''=0 \\ a'''x+b'''y+c'''z+d'''=0 \end{cases} \qquad rk\begin{bmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{bmatrix} = rk\begin{bmatrix} a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{bmatrix} = 2$$

4 eq. in 3 incognite $\quad A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} d \\ d' \\ d'' \\ d''' \end{bmatrix}$

	rk A	rk A|B	# sol.	
	2	2	∞^1	$r = s$
$r \parallel s$ →	$\boxed{2}$	3	0	$r \parallel s$ e $r \cap s = \phi$
	3	3	1	$r \cap s = \{P\}$
→	3	4	0	$r \cap s = \phi$ ma $r \not\parallel s$

↓

r e s sono <u>sghembe</u>