- Campo complesso $\quad \mathbb{C} \quad \sim \quad z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R} \quad i^2 = -1$

$$z = aI + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

coniugio $\quad z \to \bar{z}$

$$a+ib \to a-ib$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = {}^{T}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

z é reale $\iff z = \bar{z}$

$$Re(z) := \frac{1}{2}(z+\bar{z}) = a \qquad Im(z) = -\frac{1}{2}i(z+\bar{z}) = b.$$

$$z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\overline{\alpha z} = \bar{\alpha}\bar{z} \qquad \overline{\alpha+\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$$

$\mathbb{C}$ é algebricamente chiuso $\Rightarrow$ ogni polinomio di grado n in $\mathbb{C}[x]$ si spezza nel prodotto di n polinomi di grado 1 = = esso ha n radici contate con le debite molteplicità.

N.B per costruzione è sempre possibile vedere $\mathbb{C}$ come sp. vettoriale di dim $= 2$ su $\mathbb{R}$ (generato dagli elementi $1 = 1 + 0 \cdot i$
$i = 0 + 1 \cdot i$)

Similmente uno s. vettoriale $V_n(\mathbb{C})$ lo si può vedere come anche uno s. vettoriale $V_{2n}(\mathbb{R})$ ove se $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ è una base di $V_n(\mathbb{C})$

una corrispondente base di $V_{2n}(\mathbb{R})$ è data dai vettori $\tilde{\mathcal{B}} = (\bar{e}_1, i\bar{e}_1, \bar{e}_2, i\bar{e}_2 \dots \bar{e}_n, i\bar{e}_n)$

NON É DETTO CHE i vettori $\bar{e}_i$ siano reali.

$i^2 = -1$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Sia $t \in \mathbb{R}$: $\exp(it) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} =$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n!)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (i)^{2n} \frac{t^{2n}}{2n!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (i)^{2n} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_n (-1)^n \frac{t^{2n}}{2n!} + i \sum_n (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

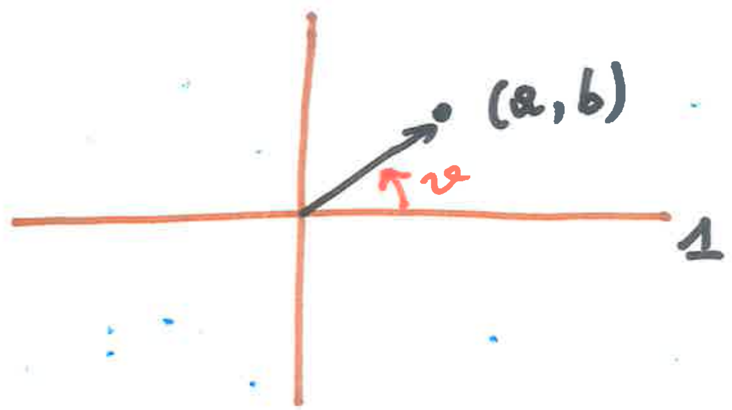
$$= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} \cdots\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \cdots\right)$$

$$= \cos(t) + i \sin(t).$$

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t).$$

$a + ib$

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$



<u>oss:</u> $e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} = 1$

ogni numero complesso z si può scrivere come

$$\alpha \cdot e^{i\beta}$$

ove $\alpha = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ e β rappresenta l'angolo che il vettore (a,b) ha con l'asse dei numeri reali.

In particolare noi abbiamo che $\cos\vartheta$

$$\frac{(a,b)\cdot(1,0)}{\sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(1,0)\cdot(1,0)}} = a$$

e $\sin\vartheta = b/\sqrt{b^2+a^2}$

$$\cos\vartheta = \frac{(a,b)\cdot(1,0)}{\|(a,b)\|\,\|(1\ 0)\|} = \frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\sin\vartheta = \frac{(a,b)\cdot(0\ 1)}{\|(a,b)\|\,\|(0,1)\|} = \frac{b}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice.

A é simmetrica $\Leftrightarrow A = {}^{T}A$.

Teorema (spettrale): Tutti gli autovalori di una matrice reale e simmetrica sono reali.

In particolare

$$\sum_{\lambda \in Spec(A)} m_a(\lambda) = n .$$

DIM: Sia $p(x) = \det(A - xI)$ il polinomio caratteristico di A. Ora: $p(x)$ é un polinomio di grado $\underset{\geq 1}{n} \Rightarrow$ in particolare $p(x)$ ha almeno una radice $\lambda \in \mathbb{C}$.

vogliamo far vedere che $\lambda \in \mathbb{R}$ per ogni radice complessa $\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(A)$.

→ in altre parole vogliamo dimostrare

$$\forall \lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(A) : \lambda = \bar{\lambda}$$

Sia $\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(A) \Rightarrow V_{\lambda}(\mathbb{C}) \neq \{\underline{0}\}$ sia dunque X un autovettore (complesso) di autovalore λ.

$$\lambda X = AX$$

osserviamo che $A \in \mathbb{R}^{n,n} \Rightarrow \bar{A} = A$; in particolare

$$\overline{AX} = \bar{A}\bar{X} = A\bar{X}$$
$$\overline{AX} = \bar{\lambda}\bar{X}$$

quindi $\bar{X}$ è autovettore di A di autovalore $\bar{\lambda}$.

calcoliamo

$$\lambda\,{}^T X \overline{X} = {}^T(\lambda X)\,\overline{X} = {}^T(AX)\,\overline{X} = {}^T X\,{}^T A\,\overline{X} =$$ poiché ${}^T A = A$ simmetrica

$$= {}^T X A \overline{X} = {}^T X (A\overline{X}) = {}^T X (\overline{\lambda}\overline{X}) =$$

poiché $\overline{A} = A$
A è reale.

$$= \overline{\lambda}\,{}^T X \overline{X}$$

$$\boxed{(\lambda - \overline{\lambda})\,{}^T X \overline{X} = 0}$$

<u>oss</u>: ${}^T X \overline{X}$ è un numero reale positivo > 0

$$[x_1\ x_2\ \dots\ x_n] \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{bmatrix} = x_1\overline{x}_1 + \dots x_n\overline{x}_n = \sum |x_i|^2 > 0$$ se almeno uno degli $x_i \neq 0$

ma X autovettore $\Rightarrow X \neq \underline{0} \Rightarrow \lambda - \overline{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$ $\square$

- A ha n autovalori in $\mathbb{C}$
- $\forall$ autovalore in $\mathbb{C}$ di A è anche autovalore in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ A ha n autovalori in $\mathbb{R}$.

Teorema (della base spettrale).

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è ortogonalmente diagonalizzabile (diag. con matrice diagonalizzante P tale che $P^{-1} = {}^{T}P$) se e solamente se $A = {}^{T}A$ (A è simmetrica).

A è matrice (reale) e simmetrica $\Rightarrow$

- → A rappresenta un prodotto scalare.
- → i prodotti scalari si possono sempre mettere "in forma diagonale".

$\exists$ P tale che $\det(P) \neq 0$ $\quad {}^{T}PAP = D \quad$ dalla teoria dei prod. scalari.

IN GENERALE $\quad {}^{T}PAP \neq P^{-1}AP$

per diagonalizzare ci interessa trovare P' tale che $\quad P'^{-1}AP' = D'$

- A reale e simmetrica $\quad P = P'$ e $D = D'$

DIM:

Supponiamo A diag. ortogonalmente

$(\exists P \in GL(n, \mathbb{R}) : {}^{T}P = P^{-1}$ e $P^{-1}AP = D)$

$\Rightarrow$ mostriamo che deve essere $A = {}^{T}A$.

Infatti se $P^{-1}AP = D \Rightarrow$

$\Rightarrow$ TRASPONENDO TUTTO

$${}^{T}P\,{}^{T}A\,{}^{T}P^{-1} = {}^{T}D = D = P^{-1}AP$$

MA ${}^{T}P = P^{-1} \Rightarrow$

$$P^{-1}\,{}^{T}A P = P^{-1}AP \Rightarrow$$

$${}^{T}A = P(P^{-1}\,{}^{T}AP)P^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1} = A,$$

Viceversa

Ipotesi: $A = {}^{T}\!A$

Tesi: $\exists P$ con $P^{-1} = {}^{T}\!P$ e $P^{-1}AP = D$

→ per induzione sull'ordine della matrice A

- $n = 1 \Rightarrow$ la matrice è simmetrica e ort. diag. con la matrice $P = (1) \Rightarrow$ OK

- $n-1 \Rightarrow n$

1) A è una matrice simmetrica $\Rightarrow$
$\Rightarrow A$ ammette almeno un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ con corrispettivo autovettore $X \neq \underline{0}$, $\|X\| = 1$

2) costruiamo ora una matrice P_1 in cui la prima colonna è X e le successive $n-1$

colonne sono una base ~~ortonormale~~ ortogonale di $\mathbb{R}^n$. In particolare vogliamo che essi siano ortogonali al vettore X.

[si può sempre fare con G/S] rispetto prod scalare std.

calcoliamo

$${}^T P_1 A P_1 = P_1^{-1} A P_1$$

$$P_1 = [\, X \;\; y_2 \; \dots \; y_n \,]$$

colonne

$${}^T P_1 A P_1 = \begin{bmatrix} {}^T X \\ {}^T y_2 \\ \vdots \\ {}^T y_n \end{bmatrix} A \, [\, X \;\; y_2 \dots y_n \,] =$$

$$\begin{bmatrix} {}^T x \\ {}^T y_2 \\ \vdots \\ {}^T y_n \end{bmatrix} [Ax \ \ Ay_2 \dots Ay_n] =$$

$$= \begin{bmatrix} {}^T x \\ {}^T y_2 \\ \vdots \\ {}^T y_n \end{bmatrix} [\lambda x \ \ Ay_2 \dots Ay_n] =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda\, {}^T x x & {}^T x A y_2 \dots {}^T x A y_n \\ \lambda\, {}^T y_2 x & \\ \vdots & \boxed{A_1} \\ \lambda\, {}^T y_n x & \end{bmatrix} =$$

$${}^T x x = 1$$

$${}^T y_i x = 0$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & {}^TXAy_2 & \cdots & {}^TXAy_n \\ 0 & & & \\ 0 & & A_1 & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \; 0 \; 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A_1 & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$n-1$ $n-1$

$A = {}^TA$ quindi

${}^TXAy = {}^TyAX$

$\Rightarrow {}^TXAy_i =$

$= {}^Ty_i AX =$

$= \lambda\, {}^Ty_i X =$

$= \lambda\, {}^TX y_i = 0$

<u>oss</u>: la matrice A_1 è • ovviamente reale
• di ordine $n-1$
• simmetrica.

Infatti l'entrata in posizione (i,j) di A con $i,j \geq 2$ è

$$ {}^T y_i A y_j = {}^T({}^T y_i A y_j) = $$
$$ = ({}^T y_j {}^T A y_i) = $$
$$ = ({}^T y_j A y_i) $$

entrata in posizione (j,i).

$\Rightarrow$ possiamo usare l'ipotesi induttiva ed $\exists$ $P_2 \in GL(n-1, \mathbb{R})$ con ${}^T P_2 = P_2^{-1}$ tale che

$$P_2^{-1} A_1 P_2 = D_1 \quad \text{matrice diagonale.}$$

costruiamo la matrice Q_2 come $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array}\right]$

osserviamo che $Q_2^{-1} = {}^{T}Q_2$ infatti

$${}^{T}Q_2 \cdot Q_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & {}^{T}P_2 P_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & I \end{array}\right] = I$$

$${}^{T}Q_2 \left[{}^{T}P_1 A P_1 \right] Q_2 = {}^{T}Q_2 \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right] Q_2 =$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & {}^{T}P_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline & A_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & P_2 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline & {}^{T}P_2 A_1 P_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline & D_1 \end{array}\right] \quad \underline{\text{diagonale.}}$$

MA $\quad {}^{T}Q_2 \left[{}^{T}P_1 A P_1 \right] Q_2 = \left({}^{T}Q_2 \, {}^{T}P_1\right) A \left(P_1 Q_2\right) =$

$$= {}^{T}\left(P_1 Q_2\right) A \left(P_1 Q_2\right).$$

PONIAMO $\quad P = P_1 Q_2$ ed osserviamo che

$$ {}^{T}P \cdot P = {}^{T}Q_2 \underbrace{{}^{T}P_1 P_1}_{I} Q_2 = \underbrace{{}^{T}Q_2 Q_2}_{I} = I $$

Quindi abbiamo che ${}^{T}P = P^{-1}$ e

$$ P^{-1} A P = D $$

con P matrice ortogonale. #

<u>OSS</u>: In generale se A è la matrice di un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ la sua segnatura $+, -, 0$ corrisponde ai segni degli autovalori di A.

In particolare

1) il prod. scalare è definito positivo (e non ci sono vettori isotropi) $\iff$ $\forall$ autovalore è positivo.

2) esso è definito negativo $\iff$ $\forall$ autovalore è negativo

3) è degenere $\iff$ almeno un autovalore è zero.

$$\left(\overset{\bar{e}_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{\bar{e}_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{\bar{e}_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \overset{\bar{e}_4}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{11}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

↑

c. lineare

vett. comp $\left(3, -\frac{1}{2}, 1, \frac{11}{2}\right)$

$3\bar{e}_1 - \frac{1}{2}\bar{e}_2 + 1\bar{e}_3 + \frac{11}{2}\bar{e}_4$

NO $\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$??

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ $S = \{(1,2)\}$ $\mathcal{L}((1,2))$

c. lin.