DIAGONALIZZAZIONE

$\lambda \in Spec(A)$

<u>Teorema</u> $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Nel caso in cui $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ si dice che λ è regolare.

<u>DIM</u>: Supponiamo $m_g(\lambda) = k \Rightarrow \dim V_\lambda = k$.

$\Rightarrow V_\lambda$ ammette una base di k vettori

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k)$. Completiamo $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k \, \bar{e}'_{k+1} \dots \bar{e}'_n) = \mathcal{B}'$

questa base ad una base di $V(\mathbb{K})$

Scriviamo la matrice P che ha per colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto la base canonica.

$$\Rightarrow AP = (AE_1\ AE_2 \dots AE_k\ \overset{C_{k+1}}{AE'_{k+1}} \dots \overset{C_n}{AE'_n}) =$$

$$= (\lambda E_1\ \lambda E_2 \dots \lambda E_k\ AE'_{k+1} \dots AE'_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = (\lambda P^{-1}E_1\ \lambda P^{-1}E_2 \dots \lambda P^{-1}E_k\ P^{-1}C_{k+1} \dots P^{-1}C_n) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\begin{matrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{matrix}}^{k}} & P^{-1}C_{k+1} \dots P^{-1}C_n \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{0} & \end{array}\right)$$

$P^{-1}AP$ é una matrice simile ad $A \Rightarrow$ ha lo stesso polinomio caratteristico. In particolare le molteplicità algebriche degli autovalori di $P^{-1}AP$ e quelle degli autovalori di A sono le stesse.

$$\Rightarrow \det(P^{-1}AP - xI) = \det \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda-x & & & & \\ & \lambda-x & & & D \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda-x & \\ \hline & & 0 & & E - xI_{n-k} \end{array}\right) =$$

$$= (\lambda - x)^k \det(E - xI_{n-k}).$$

In particolare λ è radice almeno k-esima di tale polinomio $\Rightarrow$ $m_a(\lambda) \geq k = m_g(\lambda)$

#

<u>**Teorema:**</u> Gli autospazi di una matrice A sono in somma diretta.

OSS: Una matrice A è diag. $\Leftrightarrow$ $V_n(\mathbb{K})$ ammette una base di autovettori

$\Leftrightarrow$ $V_n(\mathbb{K})$ si può scrivere come somma di autospazi

$\Leftrightarrow$ $V_n(\mathbb{K})$ è somma diretta degli autospazi di A

$\Leftrightarrow$ la somma delle dimensioni degli autospazi di A è uguale ad $n = \dim(V(\mathbb{K}))$

$\Leftrightarrow$ [Tutti gli autovalori di A appartengono a $\mathbb{K}$ (la somma delle ma è n) ed essi sono regolari (la somma delle mg $= n$).]

Per trovare una matrice diagonalizzante di A si calcolano gli autospazi; si determina una base per ognuno di essi;

si costruisce la matrice P che ha come colonne le comp. dei vettori delle basi degli autospazi #

Dichiariamo: Si dice che t spazi vettoriali $W_1, W_2 \dots W_t$ sono in somma diretta se

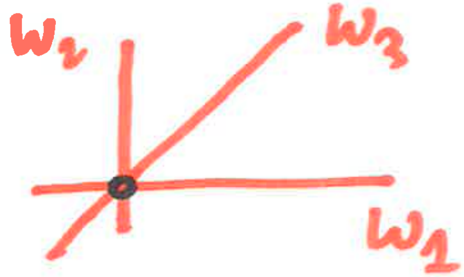
$$\forall \bar{x} \in W_1+W_2+\dots+W_t \quad \exists! (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_t) \in W_1 \times \dots \times W_t$$

tale che $\bar{x} = \bar{w}_1+\bar{w}_2+\dots+\bar{w}_t$

⚠ $W_1 \oplus W_2 \iff W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$.

$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\},\ W_2 \cap W_3 = \{\underline{0}\},\ W_1 \cap W_3 = \{\underline{0}\}$

MA NON VICEVERSA!



$W_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$W_2 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

$W_3 = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

DIM: per induzione sul numero t di autospazi.

- $t=2$

Siano $\lambda,\mu \in Spec(A)$, $\lambda \neq \mu$ e supponiamo

$\bar{v} \in V_\lambda \cap V_\mu \Rightarrow \begin{matrix} A\bar{v}=\lambda\bar{v} \\ A\bar{v}=\mu\bar{v} \end{matrix} \Rightarrow \lambda\bar{v}=\mu\bar{v} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda-\mu)\bar{v}=\underline{0}$ da cui $\bar{v}=\underline{0}$ visto che $\lambda\neq\mu$.

$\Rightarrow V_\lambda \oplus V_\mu$.

- $(t-1)\Rightarrow t$ Supponiamo che ogni somma di $t-1$ autospazi sia diretta. Mostriamo che lo deve essere anche la somma di t di essi.

$V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2} \dots V_{\lambda_{t-1}}\ V_{\lambda_t}$ t autospazi differenti

per assurdo

$X \in V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_{t-1}} + V_{\lambda_t}$ supponiamo si scriva in 2 modi differenti

$$X = X_1 + X_2 + \dots X_{t-1} + X_t$$
$$= X_1' + X_2' + \dots + X_{t-1}' + X_t'$$

$$AX = A(X_1 + \dots + X_{t-1} + X_t) = AX_1 + AX_2 + \dots + AX_{t-1} + AX_t =$$
$$= \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_{t-1} X_{t-1} + \lambda_t X_t$$

$$\lambda_1 X = \lambda_1 X_1 + \lambda_1 X_2 + \dots + \lambda_t X_t$$

calcoliamo $AX - \lambda_1 X = (\lambda_2 - \lambda_1) X_2 + \dots + (\lambda_t - \lambda_1) X_t$

y $\quad = (\lambda_2 - \lambda_1) X_2' + \dots + (\lambda_t - \lambda_1) X_t'$

$\vdots$

$y \in V_{\lambda_2} + V_{\lambda_3} + \dots + V_{\lambda_t} \Rightarrow$ per ipotesi induttiva

y si scrive in modo unico come somma

di vettori dei $(t-1)$ autospazi $V_{\lambda_2} \dots V_{\lambda_t}$

$\Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) X_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) X_2'$ e poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2 \dots \lambda_t$

$\vdots$

$(\lambda_t - \lambda_1) X_t = (\lambda_t - \lambda_1) X_t'$

otteniamo $X_2 = X_2' \dots X_t = X_t'$.

$\Rightarrow$, $X = X_1' + X_2 + \dots + X_t =$

$= X_1 + X_2 + \dots + X_t$

sottraendo $X_2 + \dots + X_t$ ad entrambe le righe

$\Rightarrow X_1' = X_1 \Rightarrow$ la somma $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}$

è diretta $\square$

Cosa accade se A non è diagonalizzabile?

1) $\sum m_a(\lambda) < n$

ci sono alcuni autovalori che non appartengono a $\mathbb{K}$.

2) $\sum m_a(\lambda) = n$ ma $\sum m_g(\lambda) < n$

Esempi:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad m_a(1) = 2 \qquad m_g(1) = 1$

↳ forma canonica (di Jordan)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\in \mathbb{R}^{2,2} \Rightarrow x^2+1$ non ammette radici

$\mathrm{Spec}(A) = \emptyset$

$\in \mathbb{C}^{2,2} \Rightarrow x^2+1$ ammette $\pm i$ come radici

$A \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x^2 - 2$

— su $\mathbb{R}^{2,2} \rightarrow$ diag. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

— su $\mathbb{Q}^{2,2} \rightarrow$ non diag: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Campo complesso.

$\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

sp. vettoriale di dim $=2$ su $\mathbb{R}$

in cui definiamo un prodotto a partire dalla regola

$i^2=-1$

- $(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(bc+ad)$ (*)

$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

OSS: 1) il prod. definito è commutativo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca-db & cb+da \\ -cb-da & ca-db \end{pmatrix}$$

2) il prod. è associativo!

3) ogni el. non nullo ha det $a^2+b^2 \neq 0$
e quindi ogni elemento non nullo è invertibile.

4) valgono le prop. distributive di somma rispetto prodotto.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\left[\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = I$$

Teorema fondamentale dell'algebra : Il campo $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.

$\downarrow$

ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ a coeff. in $\mathbb{C}$ ammette almeno una radice $\Rightarrow$ tutte le sue radici in $\mathbb{C}$

$\downarrow$

l'unico campo che è s.vett. di dimensione finita su $\mathbb{R}$ è $\mathbb{C}$.

$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$ax^2+bx+c=0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\Delta \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} \in \mathbb{R}$

$\Delta < 0 \Rightarrow x_{1,2} \in \mathbb{C}$.

OSS: Se ogni polinomio in $\mathbb{C}[x]$ ha almeno una radice in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ un polinomio di grado n in $\mathbb{C}[x]$ ha **esattamente** n radici in $\mathbb{C}$ (contate con la debita molteplicità).

$$x^2-1 < \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \qquad x^2+1 < \begin{matrix} i \\ -i \end{matrix} \qquad x^2+2x+1=(x+1)^2 < \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix}$$

DICIAMO CHE ξ è radice di $p(x)$ contata t volte se $(x-\xi)^t \mid p(x)$ (e $(x-\xi)^{t+1} \nmid p(x)$)

divide

polinomio in $\mathbb{C}[x]$ di $\deg = 6$: 6 radici

in $\mathbb{R}[x]$ di $\deg = 6$

x^6+1	$(x-2)p_5(x)$	$p_2 \cdot p_4$
0	≥ 2	0,2,4,6

OSS: 1) • Un polinomio di grado dispari in $\mathbb{R}[x]$ ha sempre almeno una radice.

• Un polinomio di grado pari in $\mathbb{R}[x]$ ha sempre un numero pari di radici.

1) $\lim_{x \to +\infty} p(x)$ ha segno $\neq$ di $\lim_{x \to -\infty} p(x) \Rightarrow \exists \xi : p(\xi) = 0$

2) se $p(x)$ non ha radici $\Rightarrow$ OK 0 è pari

se $p(x)$ ha almeno una radice $\xi \Rightarrow (x-\xi) \mid p(x)$

ma $q(x) = \dfrac{p(x)}{(x-\xi)}$ ha grado dispari e quindi

$p(x) = (x-\xi) q(x)$ ha almeno 2 radici ξ, ζ

$\Rightarrow r(x) = q(x) / (x-\xi)(x-\zeta)$ ha grado pari $\rightarrow$ iteriamo.

Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado n

se $n=1 \Rightarrow p(x) = \alpha x + \beta$ con $\alpha \neq 0$

e $-\beta \alpha^{-1} \in \mathbb{C} \Rightarrow$ il polinomio ha

tutte le sue radici in $\mathbb{C}$.

supponiamo il teorema valga per i polinomi di

grado $(n-1)$ e sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado n.

$\Rightarrow \exists \alpha : p(\alpha) = 0 \Rightarrow (x-\alpha) \mid p(x)$ cioè $p(x) =$

$= (x-\alpha)\, q(x)$ con $\deg q(x) = n-1$

$\Rightarrow q(x)$ ha $n-1$ radici $\Rightarrow p(x)$ ha $n-1+1 = n$ radici

#

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Si dice numero complesso coniugato di z il numero $\bar{z} := a - ib$

OSS: $z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$

poniamo $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} \in \mathbb{R}$.

se $z = a + i0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2} = |a|$

altrimenti vale che $|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$
$a = b = 0$

N.B: $|z \cdot t| = \sqrt{zt\bar{z}\bar{t}} = \sqrt{z\bar{z}t\bar{t}} = |z||t|$

$z \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ è l'inverso moltiplicativo di z

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = 1$$

Dato $z \in \mathbb{C}$ definiamo $\begin{cases} Re(z) := a = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ Im(z) = b = -\frac{1}{2}i(z-\bar{z}) \end{cases}$

$z = a + ib$

z é detto $\begin{cases} \text{reale se } Im(z) = 0 \rightarrow \text{el. di } \mathbb{R}. \\ \text{immaginario puro se } Re(z) = 0. \end{cases}$

z é reale $\Leftrightarrow$ $z = \bar{z}$

$z = \bar{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow b = 0.$

OSS: Sia $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomio a coeff. in $\mathbb{R}$

$f(x) = f_0 + f_1 x + \dots + f_n x^n \qquad f_i \in \mathbb{R}$

Teniamo conto del fatto che

$\forall w, z \in \mathbb{C}$: $$\overline{wz} = \overline{w} \cdot \overline{z}$$ $$\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$$

Sia ξ una radice di $f(x) \Rightarrow f(\xi) = 0$

$\xi \in \mathbb{C}$

$$0 = f(\xi) = f_0 + f_1 \xi + \ldots + f_n \xi^n$$

$$\| $$

$$\overline{0} = \overline{f(\xi)} = \overline{f_0 + f_1 \xi + \ldots + f_n \xi^n} = \overline{f_0} + \overline{f_1 \xi} + \ldots \overline{f_n \xi^n} =$$

$$= \overline{f_0} + \overline{f_1}\,\overline{\xi} + \ldots + \overline{f_n}(\overline{\xi})^n =$$

$$= f_0 + f_1 \overline{\xi} + \ldots f_n (\overline{\xi})^n = f(\overline{\xi}).$$

Supponiamo $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ed $\xi \in \mathbb{C}$ una sua radice

$\Rightarrow f(\xi) = f(\bar{\xi})$ e $\bar{\xi}$ è anche essa radice di $f(x)$.

→ In particolare le radici complesse (= non reali) di $f(x)$ vanno sempre in coppia e se $\xi \in \mathbb{C}$ è radice, così è anche $\bar{\xi}$.

→ Nello studio dei sistemi lineari non cambia la teoria lavorando su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$.

$V_k = \{f(x) \in \mathbb{C}[x]_{\leq 3} \mid f(0) = f(k) = 0\} = \{(ax+b)(x-0)(x-k) \mid a,b \in \mathbb{C}\}$

$W = \{f(x) \in \mathbb{C}[x]_{\leq 3} \mid f(i) = f(1) = 0\} = \{(a'x+b')(x-i)(x-1) \mid a,b \in \mathbb{C}\}$

$p(x) \in V_k \cap W$

$p(0) = 0$

$p(k) = 0$

$p(i) = 0$

$p(1) = 0$

se $k \notin \{0, i, 1\} \Rightarrow p(x)$ ha 4 radici distinte!

$\deg p(x) \leq 3 \Rightarrow p(x) \equiv 0$

$k \in \{0, i, 1\}$ ogni multiplo di $(x-0)(x-i)(x-1) \in V_k \cap W$

Esercizio.

Sia

$$W = \{ (\alpha x - \beta)(\gamma x - \delta) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{U} = \{ (\alpha x - \beta)(\gamma x - \delta) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \}.$$

1) Quali dei 2 insiemi $W, \mathcal{U}$ sono spazi vettoriali? 2) Nel caso siano spazi vettoriali: che dimensione hanno?

1) W non è spazio vettoriale. Infatti

$$x^2 = (1 \cdot x + 0)(1 \cdot x + 0) \in W$$

$$1 = (0 \cdot x + 1)(0 \cdot x + 1) \in W$$

ma

$$x^2 + 1 \notin W$$

2) $\mathcal{U} = \mathbb{C}[x]_{\leq 2} = \{ a x^2 + b x + c \mid a, b, c \in \mathbb{C} \}.$

$\Rightarrow \mathcal{U}$ spazio vettoriale di $\dim = 3$ su $\mathbb{C}$.

[una verifica diretta per $\mathcal{U}$ si può fare osservando che il prodotto dei termini dati è $(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta) = \alpha\gamma x^2 + (\beta\gamma + \delta\alpha) x + \beta\delta$

e che il sistema

$$(*) \begin{cases} \alpha\gamma = a \\ \beta\gamma + \delta\alpha = b \\ \beta\delta = c \end{cases}$$

ammette soluzioni per ogni $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$

N.B: $(*)$ non è lineare!!

OSS: L'insieme dei polinomi in x con una radice α è sempre spazio vettoriale e si scrive come

$$(x-\alpha)\,\mathbb{K}[x] = \{ (x-\alpha)\, p(x) \mid p(x) \in \mathbb{K}[x] \}.$$