$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ prodotto scalare definito positivo

$\hookrightarrow \forall \bar{v} \in V(\mathbb{R})$ $\bar{v}\cdot\bar{v} \geq 0$ e $\bar{v}\cdot\bar{v}=0 \iff \bar{v}=\underline{0}$

$\rightarrow$ NON DEGENERE

NON CI SONO $v \neq \underline{0}$ ISOTROPI.

<u>OSS</u>: Sia $A \subseteq V(\mathbb{R}) \Rightarrow A^{\perp} \cap \mathcal{L}(A) = \{\underline{0}\}$. In particolare si ha

$$\underline{V(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(A) \oplus A^{\perp} = A^{\perp\perp} \oplus A^{\perp}}$$

$A^{\perp}$ è un complemento ortogonale di $\mathcal{L}(A)$.

<u>DIM</u>: osserviamo che $\bar{v} \in A^{\perp} \cap \mathcal{L}(A) \Rightarrow \bar{v}\cdot\bar{v}=0 \Rightarrow \bar{v}=\underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{\perp} \oplus \mathcal{L}(A)$

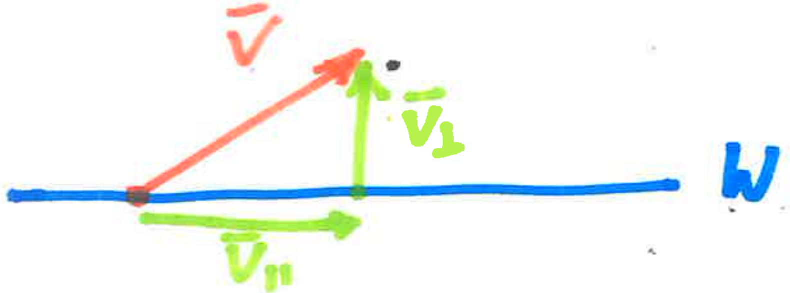
d'altro canto $\dim A^{\perp} = \dim V - \dim \mathcal{L}(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(A^{\perp} \oplus \mathcal{L}(A)) = \dim V - \dim \mathcal{L}(A) + \dim \mathcal{L}(A) =$

$= \dim V.$

$\Rightarrow A^{\perp} \oplus \mathcal{L}(A) = V(\mathbb{R}).$ $\square$

$\bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{v}_{\perp}$
con $\bar{v}_{\parallel} \in W$
$\bar{v}_{\perp} \in W^{\perp}$



Def: Si dice proiezione ortogonale di $\bar{v}$ su W il vettore $\bar{v}_{\parallel} \in W$ tale che $(\bar{v} - \bar{v}_{\parallel}) \in W^{\perp}$.

è univoc. determinato da $\bar{v}$ e W.

osserviamo che se $\bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{v}_{\perp} = \bar{v}_{\parallel}' + \bar{v}_{\perp}'$

con $\bar{v}_{\parallel}, \bar{v}_{\parallel}' \in W$, $\bar{v}_{\perp}, \bar{v}_{\perp}' \in W^{\perp} \Rightarrow$

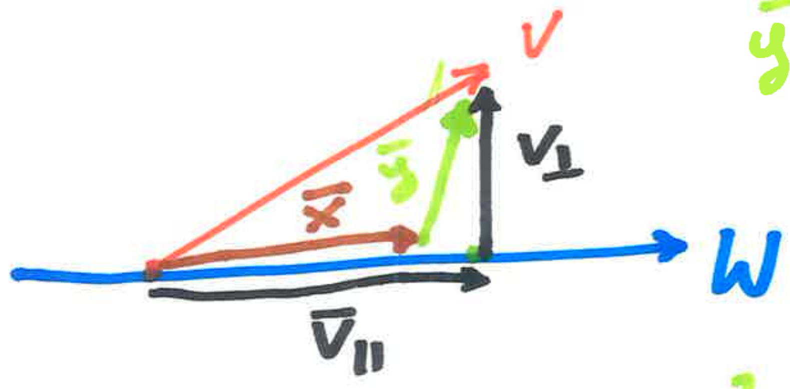
$$\bar{v} - \bar{v} = \underline{0} = (\bar{v}_{\parallel} - \bar{v}_{\parallel}') + (\bar{v}_{\perp} - \bar{v}_{\perp}') \Rightarrow$$

$$W \ni \bar{v}_{\parallel} - \bar{v}_{\parallel}' = \bar{v}_{\perp}' - \bar{v}_{\perp} \in W^{\perp} \Rightarrow \bar{v}_{\parallel} - \bar{v}_{\parallel}', \bar{v}_{\perp}' - \bar{v}_{\perp} \in W \cap W^{\perp} = \{\underline{0}\} \quad \square$$

Il vettore $\bar{v}_{\parallel} \in W$ è tale che il vettore $\bar{v}-\bar{v}_{\parallel}$ ha norma minima fra tutti i vettori $\bar{v}-\bar{x}$ con $\bar{x} \in W$.

$\downarrow$

$\bar{v}_{\parallel}$ è il vettore di W "più vicino" a $\bar{v}$



$\bar{y} = (\bar{v}-\bar{x})$

$\bar{x}+\bar{y} = \bar{v}$

$\bar{v}_{\parallel} - \bar{x} \in W$

$\bar{v}_{\perp} \in W^{\perp}$

$$\|\bar{y}\|^2 = \|\bar{v}-\bar{x}\|^2 = \|\bar{v}_{\parallel}+\bar{v}_{\perp}-\bar{x}\|^2 =$$
$$= [(\bar{v}_{\parallel}-\bar{x})+\bar{v}_{\perp}]\cdot[(\bar{v}_{\parallel}-\bar{x})+\bar{v}_{\perp}] =$$
$$= \|\bar{v}_{\parallel}-\bar{x}\|^2 + \|\bar{v}_{\perp}\|^2 + \cancel{2(\bar{v}_{\parallel}-\bar{x})\cdot\bar{v}_{\perp}} = 0 =$$
$$= \|\bar{v}_{\parallel}-\bar{x}\|^2 + \|\bar{v}_{\perp}\|^2 \geq \|\bar{v}_{\perp}\|^2$$

$\square$

Chiamiamo distanza di $\bar{v}$ da W il numero reale $\|\bar{v}_1\|$.

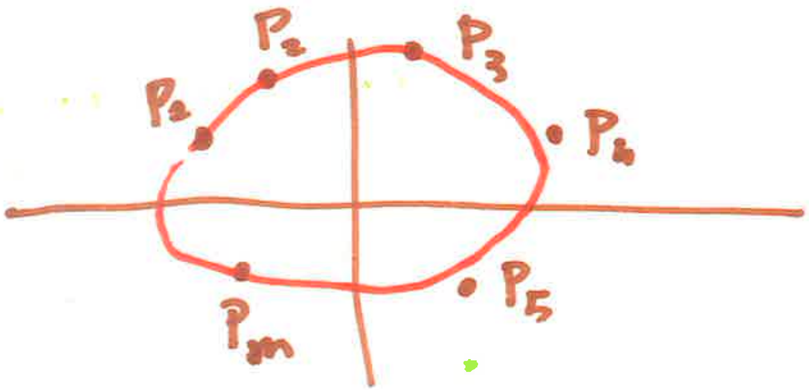
→ Risoluzione di sistemi lineari ai minimi quadrati.

$$AX = B$$

$$\rightarrow a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

osservazioni:

$(x_1, y_1) = P_1$
$(x_2, y_2) = P_2$
$\vdots$
(x_6, y_6)
$\vdots$
$(x_m, y_m) = P_m$



m equazioni
$$\begin{cases} a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1y_1+2a_{13}x_1+a_{22}y_1^2+2a_{13}y_1+a_{33}=0 \\ a_{11}x_2^2+\dots \end{cases}$$

Incognite sono $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$

coeff. dati dai valori che vengono dai P_i.

Sistema lineare omogeneo.

Se sappiamo ad es. $a_{11}\neq 0 \Rightarrow$ dividiamo per a_{11}

$\Rightarrow$ sistema di m equazioni in 5 incognite

NON OMOGENEO.

__Idea__: $AX = B$ non possiamo risolverlo (perché incompatibile)

cerchiamo una "soluzione" $\tilde{X}$ che ~~sia il più vicino possibile ad essere~~.

sia tale da "cambiare il meno possibile":

ovvero una soluzione del sistema

$$AX = B'$$

ove $B' \in \mathrm{Im}(f_A)$ e $\|B - B'\|$ è la più piccola possibile.

$\sum (b_i - b_i')^2$ deve essere minimo $\rightarrow$ SOL. AI MINIMI QUADRATI.

<u>Ipotesi</u>: prod. scalare standard $\qquad \|\bar{v}\|^2 = \sum v_i^2$

<u>oss</u> che rispetto una base ortonormale ogni prod. scalare definito positivo ha come matrice I_n

→ risolvere $AX = B'$ con B' proiez. ortogonale di B su $\mathscr{C}(A)$

è la stessa cosa che trovare un $\tilde{X}$ tale che $(A\tilde{X} - B) \perp \mathscr{C}(A)$

Infatti $(B' - B) \perp \mathscr{C}(A)$ e sappiamo che ~~[illegible]~~ la proiezione ort. B' di B è unica!

$$(A\tilde{X}-B) \perp \mathcal{C}(A) \iff$$

$${}^{T}A(A\tilde{X}-B) = \underline{0}$$

→ risolvere ai minimi quadrati é eq. a risolvere

$$\boxed{({}^{T}AA)X = {}^{T}AB}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \quad \text{incomp.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x=2$$

$$\Rightarrow \text{"}x=1\text{"}$$

prod. scalari definiti positivi.

$V_n^0(\mathbb{R})$ s. vettoriale euclideo.

supponiamo $\mathcal{B}_1 = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ e $\mathcal{B}_2 = (\bar{e}_1' \dots e_n')$ due basi ortonormali

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_j' = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

La matrice di cambiamento di base A da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ deve essere tale da lasciare invariata la forma del prodotto scalare

$$^T\!A \cdot I \cdot A = I$$
$$\shortparallel$$
$$^T\!A A$$

cioè A è tale che $\boxed{{}^{T}A = A^{-1}}$

A è detta <u>matrice ortogonale</u>.

<u>N.B.</u>: Dalle formule del prodotto righe per colonne si vede che l'entrata (i,j) di ${}^{T}AA = I$ è il

⚠ prod scalare della i-esima colonna di A con la j esima colonna di A (ovvero quello di $A A^{T} = I$ è la stessa cosa per le righe) $\Rightarrow$

le colonne (righe) di una <u>matrice ortogonale</u> devono essere un sistema di <u>vettori ortonormali</u>. !!

(a 2 a 2 ortogonali e di norma 1).

Sia A la matrice di una trasformazione lineare f_A di uno sp. vettoriale $V_n^\circ(\mathbb{R})$ rispetto una base ortonormale.

f_A è detta isometria se $\forall \bar{v} \in V$: $\|\bar{v}\| = \|f_A(\bar{v})\|$

ma questo accade $\iff$ A è una matrice ortogonale.

$$\|\bar{v}\|^2 = {}^T\bar{v} \cdot \bar{v} = {}^T(A\bar{v})(A\bar{v}) = {}^T\bar{v}\,{}^TA A \bar{v} \quad \forall \bar{v}$$

$$= \|A\bar{v}\|^2$$

vale $\forall \bar{v} \iff {}^TA A = I \Rightarrow A = A^{-1}$

Nel piano: A matrice ortogonale

$$= A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad {}^{T}A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\cancel{{}^{T}AA = \left(a^2+c^2 \quad ac+bd \right.}$$

$$A\,A^{T} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

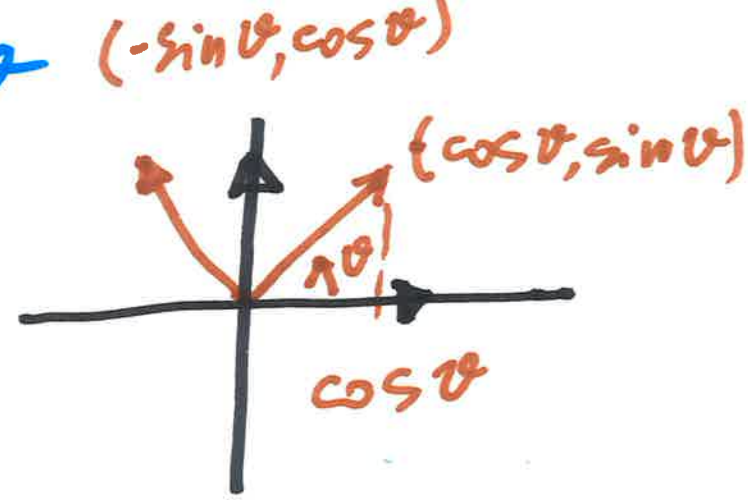
$$\begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ c^2+d^2 = 1 \end{cases} \qquad ac+bd = 0$$

$a = \sin \vartheta$ $\quad$ $c = \sin \gamma$

$b = \cos \vartheta$ $\quad$ $d = \cos \gamma$

$$\sin\vartheta \sin\gamma + \cos\vartheta \cos\gamma = 0$$

$$\sin\gamma = -\cos\vartheta \qquad \cos\gamma = \sin\vartheta$$



$$A_\vartheta = \begin{pmatrix} \sin\vartheta & -\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$B_\vartheta = \begin{pmatrix} \sin\vartheta & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det B_\vartheta = -1$$

$$\det A_\vartheta = 1$$

Ricordiamo che vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

$$|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|$$

Definiamo come coseno dell'angolo fra $\bar{v}$ e $\bar{w}$ il valore

$$\cos \widehat{\bar{v}\bar{w}} := \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|}$$

<u>OSS:</u>

$$-1 \leq \cos \widehat{vw} \leq +1$$

$$\bar{v} \perp \bar{w} \Rightarrow \cos \widehat{vw} = 0$$

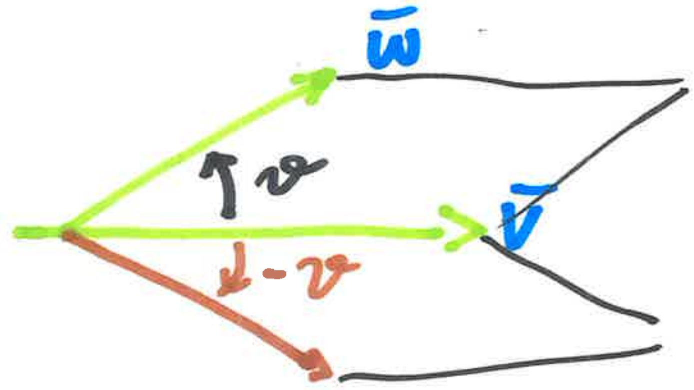
$$\bar{v} /\!/ \bar{w} \Rightarrow |\cos \widehat{vw}| = 1$$

$$\bar{v} = \alpha \bar{w}$$

$$\cancel{\bar{v} \cdot \bar{w} = \alpha^2 \|\bar{w}\|^2}$$

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = \alpha\, \bar{w} \cdot \bar{w}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\bar v \cdot \bar w}{\|\bar w\| \cdot \|\bar v\|} = \frac{\alpha}{|\alpha|} \frac{\|\bar w\|^2}{\|w\|^2} \in \{\pm 1\}.$$



ci serve introdurre una orientazione. lo facciamo usando (nel piano) il determinante come funzione.

$\bar v$ e $\bar w$ sottendono l'angolo ϑ se $\cos\vartheta = \dfrac{\bar v \cdot \bar w}{\|\bar v\|\|\bar w\|}$

ed in più il $\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} > 0$: sottendono $-\vartheta$ se $\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} < 0$ #

5x5 aut. 1 e 3 geom 1, 2

non diag.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right]$$

Aut_3 geom = 2 NON DIAG 3x3

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1, 2$

$\nearrow^{1} \qquad \nearrow^{2}$

autovettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$a_{11} = 1 \quad a_{13} = 1$

$a_{12} = -1$

$P^{-1} D P$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1$

$a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1$

$a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1$

$a_{11} + a_{13} = 2$

$a_{21} + a_{23} = 0$

$a_{31} + a_{32} = 2$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$a_{21} = 0, a_{23} = 0, a_{22} = 1$

in $V_n^\circ(\mathbb{R})$ fissata data una base ortogonale $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ si dice che una base $\overset{\text{ort.}}{} \mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ ha la stessa orientazione di $\mathcal{B}$ se il det. della matrice di cambiamento di base $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ è $+1$.

se $n=3$ si definisce in $V_3^\circ(\mathbb{R})$ anche il cosiddetto prodotto vettoriale fra 2 vettori:

$$V \times V \longrightarrow V$$
$$(\bar{v}, \bar{w}) \longrightarrow \bar{v} \times \bar{w}$$

ove $\bar{v} \times \bar{w}$ è un vettore ortogonale ai vettori $\bar{v}$ e $\bar{w}$ e tale che $\forall\, \bar{u} \in V$: $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$ corrisponde al "volume" del parallelepipedo definito da $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

secondo una orientazione fissata dalla base data.

In componenti: se $\cancel{\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)}$
$\cancel{\bar{v} = (v_1\ v_2\ v_3)}$

$$\bar{u} = u_1\bar{e}_1 + u_2\bar{e}_2 + u_3\bar{e}_3$$

$$\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + v_3\bar{e}_3$$

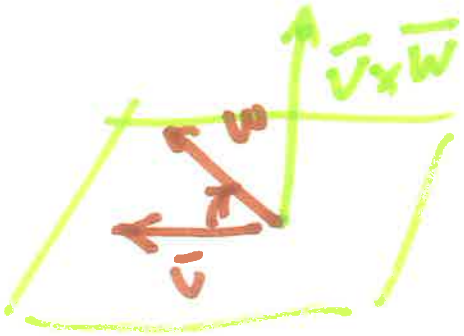
$$\bar{w} = w_1\bar{e}_1 + w_2\bar{e}_2 + w_3\bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \quad \bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \\ \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \bar{w}_3 \end{vmatrix} = \bar{e}_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \bar{e}_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \bar{e}_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

osserviamo che

1) $$\bar{a} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \{a_1 a_2 a_3\}$$

$$(a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3) \cdot \bar{u} =$$



$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

é un "volume orientato".

2) $\bar{v} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = 0$ e $\bar{w} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = 0$

$$\Rightarrow (\bar{v} \times \bar{w}) \perp \mathcal{L}(\bar{v}, \bar{w}).$$

essenzialmente $\| \bar{v} \times \bar{w} \|$ corrisponde all'area (con segno) del parallelogramma definito da $\bar{v}$ e $\bar{w}$

$\mathbb{K}$ campo

$V_n(\mathbb{K})$ sp. vettoriale di dim $= n$ su $\mathbb{K}$.

$$f : V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow V_n(\mathbb{K})$$

in generale f ammette tante possibili rappresentazioni al variare della base che viene scelta.

A matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$

A' matrice di f rispetto a $\mathcal{B}'$

$\Rightarrow$ $A' = P^{-1} A P$ ove P matrice di camb. di base.

Def: Due matrici quadrate $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono dette <u>simili</u> se e solamente se $\exists\, P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che $A = P^{-1} B P$

ovvero $\boxed{PA = BP}$.

Matrici simili rappresentano la medesima applicazione lineare rispetto basi differenti.

CI ASPETTIAMO CHE

→ il rango sia lo stesso.

→ il det sia lo stesso.

→ l'insieme dei vettori $\bar{v}$: $f(\bar{v}) = \bar{v}$, ~~sia~~ ovvero degli X tali che $AX = X$ sia un sott. della stessa dimensione per entrambe.

$AX = X \sim BX = X$

OSS: la relazione di similitudine fra matrici è di equivalenza.

↓

le classi di eq. corrispondono a funzioni lin. definite a meno di un cambiamento di base.

↓

cerchiamo per ogni funzione lineare la base rispetto cui è più semplice.

Lemma: Essere simili è rel. di equivalenza fra el. di $\mathbb{K}^{n,n}$:

1) $A = I^{-1} A I = A$ A simile a se stessa

2) $A = P^{-1} B P \Rightarrow P A P^{-1} = B$; posto $Q = P^{-1}$ si ha $B = Q^{-1} A Q \Rightarrow$ A simile a B $\Leftrightarrow$ B simile ad A

3) $A = P^{-1} B P \quad B = Q^{-1} C Q \Rightarrow A = P^{-1} Q^{-1} C Q P =$

$$= (P^{-1}Q^{-1})\, C\, (QP) = (QP)^{-1} C (QP) = S^{-1} C S \qquad \square$$

con $S = QP$.

Supponiamo $V_n(\mathbb{K})$ ammetta una base $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ di "direzioni fissate" da f ovvero che

$$f(\bar{e}_i) = \alpha_i \bar{e}_i$$

$\forall i = 1 \dots n$.

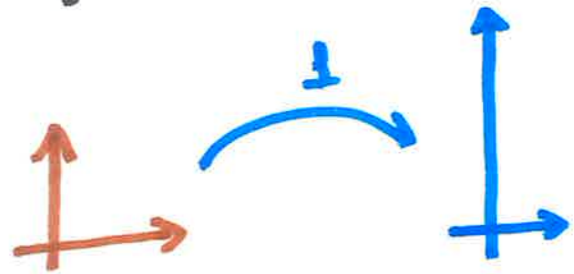
$\Rightarrow$ la matrice di f rispetto tale base è

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix}$$ diagonale.

In particolare dato un vettore di componenti $\bar{v} = (v_1 \dots v_n)$, la componente i-esima di $f(\bar{v})$

dipende solo dalla componente i-esima di $\bar{v}$.

$f(\bar{v}) = (\alpha_1 v_1 \dots \alpha_n v_n)$



<u>Def.</u>: Un vettore $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$ con $\bar{v} \neq \underline{0}$ è detto <u>autovettore</u> per f se $f(\bar{v}) \in \mathcal{L}(\bar{v})$.

Fissiamo una base e lavoriamo in componenti

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$ si dice <u>autovettore</u> di A ogni vettore $X \in \mathbb{K}^{n,1}$ con $X \neq \underline{0}$ tale che $AX = \lambda X$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$AX = \lambda X$$

$$AX = \lambda I X$$

$$\downarrow$$

$$(*) \quad (A - \lambda I)X = \underline{0}$$

Quando $(*)$ ammette soluzione? SEMPRE! :-c $\underline{0}$

soluzione non banale?

$\iff$ $(*)$ NON È DI CRAMER.

$\iff$ $rk(A - \lambda I) < n$

$\iff$ $\det(A - \lambda I) = 0$

equazione caratteristica di A.

Def: Si dicono autovalori di A le soluzioni in $\mathbb{K}$ della sua equazione caratteristica.
L'insieme di tutti gli autovalori di A è detto spettro di A e si indica con

$$\mathrm{Spec}(A) := \{\lambda \mid \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

lo spettro ci dice per quali λ la matrice $A-\lambda I$ non è invertibile.

→ Sia $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, un vettore X tale che $(A-\lambda I)X = \underline{0}$
$X \neq \underline{0}$ è detto autovettore di A di autovalore λ.

oss: $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A)$: $V_\lambda := \{X \mid AX = \lambda X\}$ è un sottospazio vettoriale di $V_n(\mathbb{K})$ e $\dim V_\lambda = n - rk(A-\lambda I)$.

Dim $V_\lambda = \ker(A-\lambda I)$ e quindi che sia sottospazio della dim data è immediato.

<u>Def</u>: Si dice $\forall \lambda \in Spec(A)$ <u>molteplicità geometrica</u> di λ $m_g(\lambda) := \dim V_\lambda = n - rk(A-\lambda I)$.

Si dice molteplicità algebrica di λ il numero di volte che λ è radice del polinomio caratteristico.

$p_A := \det(A - xI)$.

m_{a_λ} = <u>molt. algebrica</u>.

<u>Teorema</u>:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$$ (lunedì)

__OSS:__ Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico; in particolare hanno lo stesso det.

__DIM:__ $A = P^{-1} B P$

$$
\begin{aligned}
p_A(x) &= \det(A - xI) = \det(P^{-1} B P - x P^{-1} P) = \\
&= \det\left[P^{-1}(B - xI) P\right] = \cancel{\det P^{-1} \det} \\
&= \det P^{-1} \cdot \det(B - xI) \det P = \\
&= \det(B - xI) = p_B(x) \qquad \square
\end{aligned}
$$

→ In particolare matrici simili hanno gli stessi autovalori!

→ Hanno anche le stesse molt. geometriche e algebriche per gli autovalori.

#

$$rk(A - \lambda I) = \cancel{rk(P^{-1}BP}$$

$$rk[P^{-1}(A-\lambda I)] =$$

$$= rk[P^{-1}(A-\lambda I)P] =$$

$$= rk(B - \lambda I).$$

perché P invertibile.

⚠ non è vero che matrici con gli stessi autovalori e stesse molteplicità algebriche e geometriche sono simili

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \not\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$m_a = 4 \quad m_g = 2 \qquad\qquad m_a = 4 \quad m_g = 2$

Def: Una matrice A è detta <u>diagonalizzabile</u> ($A \in \mathbb{K}^{n,n}$) se e soltanto se essa è simile ad una matrice diagonale D.

Teorema: A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^{n,1}$ ammette una base di autovettori per A.

DIM: Supponiamo $\mathcal{B} = (C_1 \dots C_n)$ base di autovettori di A e che $AC_i = \lambda_i$ $\Rightarrow$ posto $P = (C_1 \dots C_n)$ vediamo che

$$AP = \cancel{P}\,(\lambda_1 C_1 \dots \lambda_n C_n) =$$

$$= P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

ove $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

poiché $(C_1 \dots C_n)$ base, P invertibile $\Rightarrow$

$$P^{-1}AP = D$$ ed A è simile a D.

viceversa: se $P^{-1}AP = D \Rightarrow AP = PD$

$\Rightarrow \forall$ colonna C_i di P ottengo $AC_i = \lambda C_i$

$\Rightarrow$ ogni colonna di P è un autovettore di $A \Rightarrow$ poiché P consta di n colonne indip. le colonne di P sono una base di autovettori per $\mathbb{K}^{n,1}$. $\square$

<u>obiettivo</u>: trovare una base di autovettori per $\mathbb{K}^{n,1}$ (se esiste).