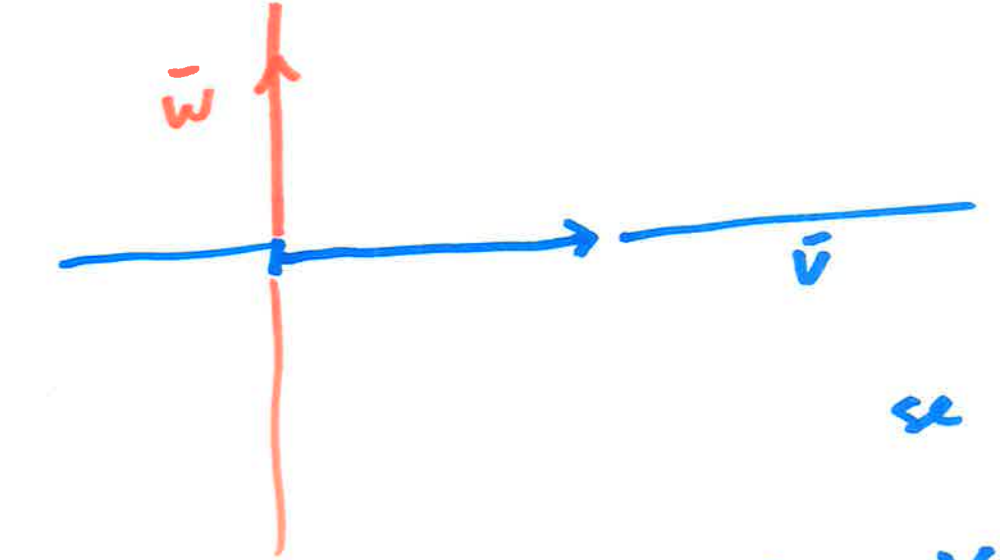
prodotto scalare $\rightarrow$ $\perp$ ortogonalità

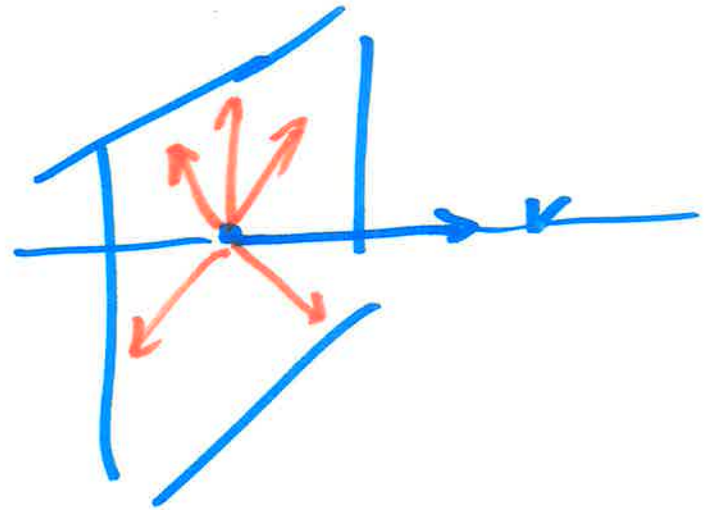
$\beta : V \times V \to \mathbb{K}$

$\beta(\bar{v}, \bar{w}) = 0 \iff \bar{v} \perp \bar{w}$



$v^{\perp\perp} = \mathcal{L}(\bar{v})$

se non deg.



$\dim X^{\perp} =$

$\dim V - \dim \mathcal{L}(X).$

Ad ogni prodotto scalare è associata una forma quadratica.

<u>Def</u>: Una forma quadratica $q: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ é un polinomio omogeneo di II grado in $x_1 \dots x_n$

$$q: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$$

<u>OSS</u>: Sia $\beta: V \times V \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare. Allora $q: V \to \mathbb{K}$ $\quad q(\bar{x}) = \beta(\bar{x}, \bar{x})$ è una forma quadratica.

Viceversa: sia $q: V \to \mathbb{K}$ una forma quad.

$\Rightarrow \quad \beta: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$

definito da $\beta(\bar{x}, \bar{y}) = q(\bar{x}+\bar{y}) - q(\bar{x}) - q(\bar{y})$

è un prodotto scalare.

Esempio $\quad q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\cancel{(x,y) \to x^2+y^2}$

$(x_1, x_2) \longrightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$

$$q(\bar{x}+\bar{y}) - q(\bar{x}) - q(\bar{y}) =$$

$$= (x_1+y_1)^2 + 2(x_1+y_1)(x_2+y_2) + 4(x_2+y_2)^2$$

$$-x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_1^2 - y_1^2 - 2y_1y_2 - 4y_2^2 =$$

$$= 2x_1y_1 + \cancel{2x_1x_2} + \cancel{2y_1y_2} + 2x_1y_2 + 2y_1x_2$$

$$+ 8x_2y_2 - \cancel{2x_1x_2} - \cancel{2y_1y_2} =$$

$$= 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 8x_2y_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

<u>IPOTESI</u> $1+1 \neq 0$

In generale sia $\beta: V \times V \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare $\Rightarrow$ esiste una base $\mathcal{B}$ di V formata da vettori a 2 a 2 ortogonali fra loro.

→ In particolare rispetto questa base la matrice che rappresenta il prod. scalare β è diagonale.

$$\beta(\bar{v},\bar{w}) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jj}\, v_j w_j$$

Innanzi tutto sia $R = V^{\perp} = \mathrm{rad}(\beta)$ cioè l'insieme di tutti i vettori $\bar{v} \in V$ tali che $\beta(\bar{v},\bar{w}) = 0 \;\; \forall\, \bar{w} \in V$.

Abbiamo visto che $R \leq V$. Se $R = \{\underline{0}\}$ non facciamo nulla. Altrimenti sia $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k)$ una base di R.

~~Esiste nessuna~~ Se $R = V \Rightarrow$ abbiamo una base di V e la matrice di β è la matrice nulla $\Rightarrow$ FINE.

Se $R \neq V \Rightarrow$ ~~___~~ ~~___~~ consideriamo $V \setminus R$

può essere che $\forall \bar{v} \in V \setminus R$ si abbia ~~___~~ $\beta(\bar{v}, \bar{v}) = 0$? No perché se così fosse si vedrebbe dalla formula introdotta prima $(1+1 \neq 0)$ che β dovrebbe essere nullo identicamente $\forall$ 2 vettori di $V \setminus R$.

$\Rightarrow$ prendiamo un $\bar{s}_1 \in V \setminus R$ con $\beta(\bar{s}_1, \bar{s}_1) \neq 0$ e aggiungiamolo alla base.

$\mathcal{B}' = (r_1 \dots r_k \; s_1)$

Rispetto il sott. generato da $\mathcal{B}'$ la matrice di β

è $\begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & \beta(\bar{v}_1,\bar{v}_1) \end{bmatrix}$

consideriamo $(\mathcal{B}')^{\perp}$ ed osserviamo che
$\mathcal{L}(\bar{v}_2) \not\subseteq (\mathcal{B}')^{\perp}$ $\Rightarrow$ applichiamo lo stesso
ragionamento di prima su $(\mathcal{B}')^{\perp}$ e troviamo
$\bar{v}_1$ con $\beta(\bar{v}_1,\bar{v}_1) \neq 0$ lì dentro

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \\ & & \beta(\bar{v}_1,\bar{v}_1) & \\ 0 & & & \beta(\bar{v}_2,\bar{v}_2) \end{bmatrix}$$

$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$

prodotti scalari Euclidei = <u>positivi definiti</u>

<u>Def</u>: un prod. scalare $\beta : V(\mathbb{R}) \times V(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è detto positivo definito se $\forall \bar{v} \in V(\mathbb{R})$

$$q(\bar{v}) \geq 0 \quad \text{e} \quad q(\bar{v}) = 0 \iff \bar{v} = \underline{0}$$

<u>Def</u>: Sia β un prod. scalare definito positivo. Si dice <u>norma indotta da β</u> la funzione

$$\begin{aligned} V(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ \bar{v} &\to \|\bar{v}\| := \sqrt{\beta(\bar{v},\bar{v})}. \end{aligned}$$

<u>Def</u>: Una funzione $V(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è detta <u>norma</u>

se

1) $\forall \bar{v} \in V(\mathbb{R}) \qquad \|\bar{v}\| \geq 0$

2) $\|\bar{v}\| = 0 \iff \bar{v} = \underline{0}$

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad \|\alpha \bar{v}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|$

4) $\forall \bar{v}, \bar{w} \in V(\mathbb{R}): \quad \|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$

disug. triangolare.

Esempi di norme

$\|\bar{v}\|_1 := \cancel{\max} \sum_i |v_i|$

$\|\bar{v}\|_\infty = \sup |v_i|$

$\boxed{\|\bar{v}\|_2 := \left(\sum |v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$

$\|\bar{v}\|_n := \left(\sum |v_i|^n \right)^{\frac{1}{n}}$

Se $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ prod. scalare $\Rightarrow$

$$\beta(\alpha\bar{x}, \alpha\bar{x}) = \alpha^2 \beta(\bar{x},\bar{x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\alpha\bar{x}\| = \sqrt{\alpha^2 \beta(\bar{x},\bar{x})} = |\alpha| \sqrt{\beta(\bar{x},\bar{x})} = |\alpha|\, \|\bar{x}\|.$$

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCWARTZ

$$|\beta(\bar{x}, \bar{y})| \le \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \qquad (1)$$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE.

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \le \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|. \qquad (2)$$

<u>DIM</u> di (1). Se $\bar{x} = \underline{0}$ o $\bar{y} = \underline{0} \Rightarrow \beta(\bar{x},\bar{y}) = 0$

e $\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| = 0 \Rightarrow$ <u>OK</u>

se $\bar{x} \neq \underline{0}$ e $\bar{y} \neq \underline{0}$ $\Rightarrow$ osserviamo che

$$\beta(\bar{x}+\alpha\bar{y}, \bar{x}+\alpha\bar{y}) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

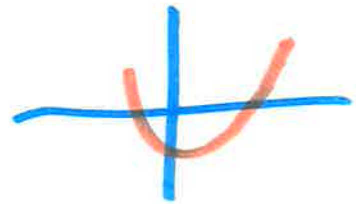
$$\parallel$$

$$\underbrace{\beta(\bar{x},\bar{x}) + 2\alpha\beta(\bar{x},\bar{y}) + \alpha^2\beta(\bar{y},\bar{y})}.$$

espressione di II grado che deve essere ≥ 0 $\forall \alpha$

$\Rightarrow$ l'equazione $\quad x^2\beta(\bar{y},\bar{y}) + 2x\beta(\bar{x},\bar{y}) + \beta(\bar{x},\bar{x}) = 0$

non può avere 2 radici reali distinte!



$\frac{\Delta}{4} \leq 0$ $\qquad \frac{\Delta}{4} = \beta(\bar{x},\bar{y})^2 - \beta(\bar{y},\bar{y})\,\beta(\bar{x},\bar{x}) \leq 0$

$$\beta(\bar{x},\bar{y})^2 \leq \|\bar{x}\|^2 \cdot \|\bar{y}\|^2$$

estraendo $\sqrt{\ }$

$$|\beta(\bar{x},\bar{y})| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \qquad \square$$

<u>DIM</u> di (2).

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = \beta(\bar{x}+\bar{y}, \bar{x}+\bar{y}) =$$

$$= \beta(\bar{x},\bar{x}) + 2\beta(\bar{x},\bar{y}) + \beta(\bar{y},\bar{y}) =$$

$$= \|\bar{x}\|^2 + 2\beta(\bar{x},\bar{y}) + \|\bar{y}\|^2 \leq$$

$$\|\bar{x}\|^2 + 2|\beta(\bar{x},\bar{y})| + \|\bar{y}\|^2 \leq$$

$$= \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2 =$$

$$= (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2$$ estraendo $\sqrt{\ }$

otteniamo

$$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \qquad \square.$$

Def: Una base $\mathcal{B}$ di $V_n(\mathbb{R})$ è detta ortonormale rispetto un prod. scalare definito positivo se

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ $\qquad \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$

e $\quad e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

OSS: Ogni prod. scalare def. positivo ammette basi ortonormali.

GRAM-SCHMIDT : data una base $\mathcal{B}$ determina una base $\mathcal{B}'$ ortonormale con in più le proprietà che se $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

e $\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall j : \quad \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_j) = \mathcal{L}(\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_j).$

<u>procedura</u>: partiamo dal primo vettore di $\mathcal{B}$.

$$\bar{e}_1 \longrightarrow \quad \bar{e}'_1 = \frac{1}{\|\bar{e}_1\|} \cdot \bar{e}_1$$

$$\bar{e}_2 \longrightarrow \quad \bar{e}^\circ_2 = \bar{e}_2 - \frac{\bar{e}_2 \cdot \bar{e}'_1}{\bar{e}'_1 \cdot \bar{e}'_1} \bar{e}'_1 \qquad \bar{e}^\circ_2 \perp \bar{e}_1$$

$$\bar{e}'_2 = \frac{1}{\|\bar{e}^\circ_2\|} \bar{e}^\circ_2$$

$\vdots$

$$\bar{e}_k \longrightarrow \quad \bar{e}^\circ_k = \bar{e}_k - \sum_{i<k} \frac{\bar{e}_k \cdot \bar{e}'_i}{\bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_i} \bar{e}'_i \qquad \bar{e}_k' = \frac{1}{\|\bar{e}^\circ_k\|} \bar{e}^\circ_k$$

G/S $\quad ((100), (010), (111))$

$$\bar{e}_1' = (100)$$

$$\bar{e}_2' = (010)$$

$$\bar{e}_3' = (001)$$

$$((111), (010), (001))$$

$$\bar{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}(111)$$

$$\bar{e}_2^0 = (010) - \frac{1}{\sqrt{3}}(111)\cdot(010) =$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\bar{e}_3 = \ldots$$

OSS: Un prodotto scalare def pos è rappresentato dalla matrice identica rispetto una base ortogonale di $V_n(\mathbb{R})$.

OSS 2: In generale se abbiamo un prod scalare

$$V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

possiamo rappresentarlo rispetto una base opportuna con una matrice che contiene solo (0 +1, -1) sulla diag. principale.

$$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n) \qquad \begin{bmatrix} \beta_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

se $\beta(\bar{e}_i, \bar{e}_i) = 0 \Rightarrow \beta_{ii} = 0$ e $\bar{e}_i' = \bar{e}_i$

se $\beta(\bar{e}_i, \bar{e}_i) > 0 \to e_i' = \frac{1}{\sqrt{\beta(e_i, e_i)}} \bar{e}_i$

se $\beta(\bar{e}_i, \bar{e}_i) < 0$

$$\rightarrow \bar{e}'_i = \frac{1}{\sqrt{-\beta(\bar{e}_i, \bar{e}_i)}} \bar{e}_i$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & +1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

l'elenco dei segni delle entrate è detto segnatura del prodotto scalare.

$(+ + + \dots +)$ Def. pos.

$(- - - \dots -)$ Def. negativo.

$(+ + + -)$ oppure $(- - - +)$

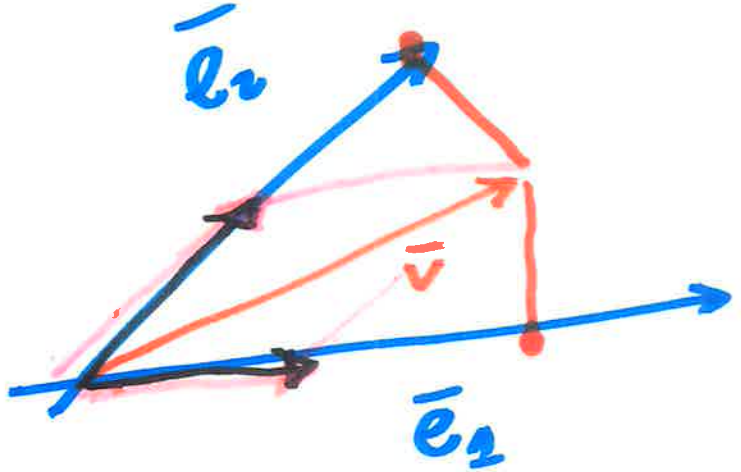
__OSS:__ Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

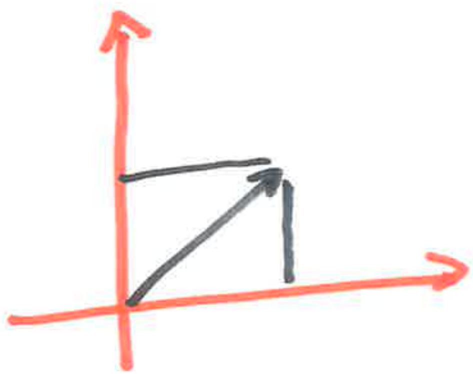
e $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$ un vettore.

Allora $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{v} \cdot \bar{e}_i)\bar{e}_i$

i coeff. della combinazione lineare che dà il vettore $\bar{v}$ rispetto la base $\mathcal{B}$ sono proprio $\bar{v}_i = (\bar{v} \cdot \bar{e}_i)$.

__DIM:__ $\bar{v} \cdot \bar{e}_i = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \bar{e}_j\right) \cdot \bar{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\bar{e}_j \cdot e_i) = \alpha_i \bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = \alpha_i$ $\square$





OSS 2: Una sequenza di vettori ortonormali è sempre libera.

Supponiamo $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ ortonormale.

e $\quad \sum \alpha_i \bar{v}_i = \underline{0} \Rightarrow \forall j \quad \bar{v}_j \cdot \left(\sum \alpha_i \bar{v}_i\right) = \bar{v}_j \cdot \underline{0} = 0$

$$\bar{v}_j \cdot \left(\sum \alpha_i \bar{v}_i\right) = \alpha_j \bar{v}_j \cdot \bar{v}_j = \alpha_j$$

$\square$

Sia $V_n(\mathbb{R})$ uno s. vettoriale reale

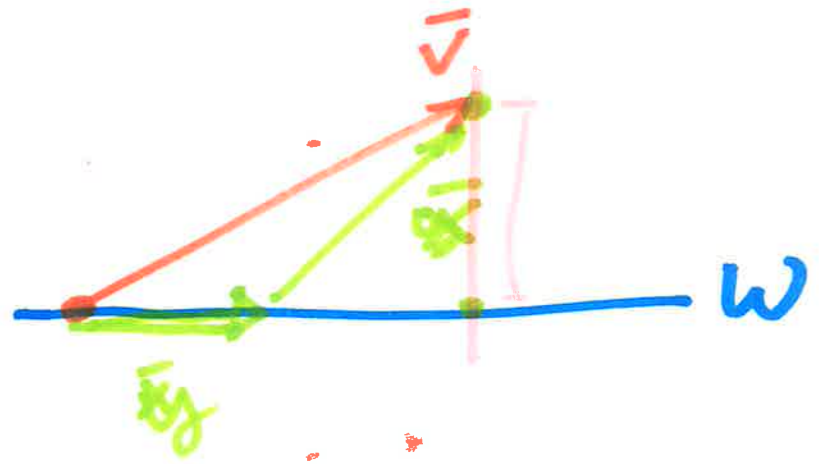
$\mathcal{B}$ una sua base ortonormale e β un prod. scalare definito positivo $\rightarrow$ $V_n(\mathbb{R}) = V_n^{\circ}(\mathbb{R})$ sp. vett. euclideo.

Sia $W \leq V_n(\mathbb{R})$ e sia $\bar{v} \in V_n(\mathbb{R})$.

~~Allora la proiezione ortogonale di $\bar{v}$ su W è il vettore di W avente norma minima tale che~~

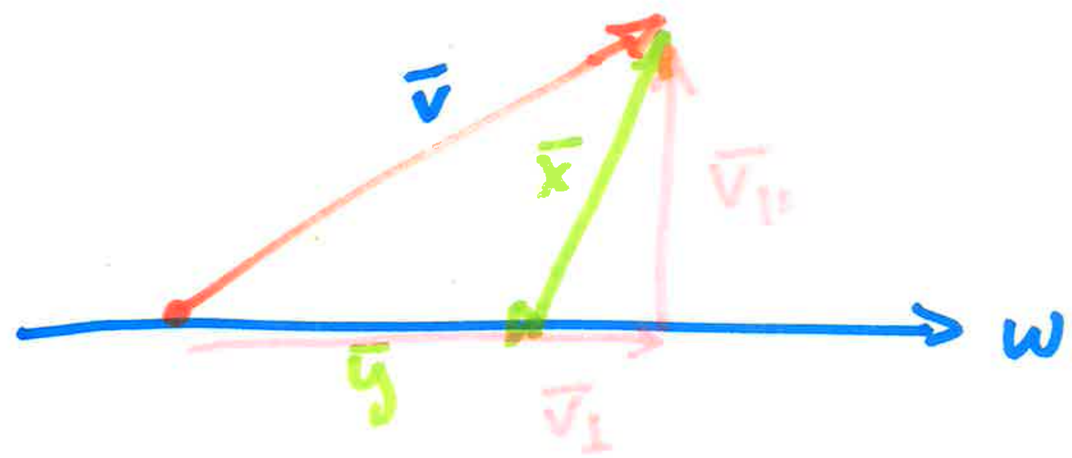
Definiamo come distanza di $\bar{v}$ da W la norma del vettore $\bar{v}_\perp$ ove $\bar{v}_\perp$ è un vettore appartenente a $W^\perp$ e tale che $\bar{v} = \bar{v}_\perp + \bar{w}$ con $\bar{w} \in W$.

Il vettore $\bar{v}_{\parallel} \in W$ é il vettore di W tale che posto $\bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{x}$ $\bar{x}$ ha norma minima



$\bar{y} = \bar{v}_{\parallel}$
$\bar{x} = \bar{v}_\perp$

$$\overline{v} = \overline{x} + \overline{y} = \overline{v_{\parallel}} + \overline{v_{\perp}}$$



$$\overline{x} = (\overline{v_{\perp}} - \overline{y}) + \overline{v_{\parallel}}$$

$$\|\overline{x}\|^2 = \|(\overline{v_{\perp}} - \overline{y})\|^2 + \|\overline{v_{\parallel}}\|^2 + 2(\overline{v_{\perp}} - \overline{y}) \cdot \overline{v_{\parallel}} =$$

$$= \|v_{\perp} - y\|^2 + \|\overline{v_{\parallel}}\|^2 \geqslant \|\overline{v_{\parallel}}\|^2$$

CONSEGUENZA:

$\bar{v}_{\parallel}$ è il vettore $\bar{x}$ di norma minima tale che $\exists\, \bar{y} \in W$ con $\bar{v} = \bar{x} + \bar{y}$.

[ed in un certo senso $\bar{v}_{\perp}$ è il vettore di W "più vicino" a $\bar{v}$].

$\square$