Studio di un sistema lineare $AX=B$

n = numero incognite

1) calcolo $rk(A)$ e $rk(A|B)$

2) Rouché-Capelli $\rightarrow$ $rk(A) = rk(A|B)-1 \Rightarrow$ NON COMPAT. FINE

   $rk(A) = rk(A|B)$ si prosegue

3) # soluzioni (nullità + rango) 1 se $rk(A)=rk(A|B)=n$

   ∞^{n-k} $k = rk(A) = rk(A|B)$.

4) Determinare le soluzioni come

   a) soluzione particolare $\bar{X}$

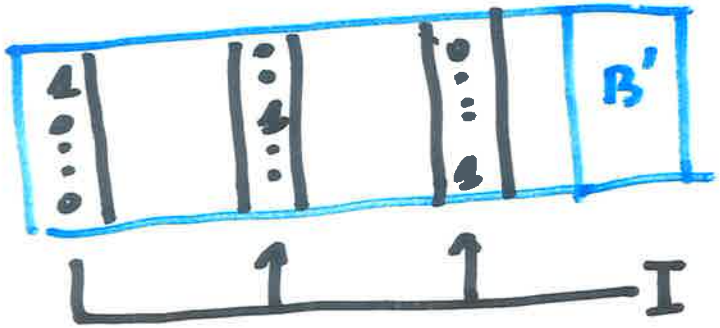
   b) base delle soluzioni del sistema omogeneo associato $AX=\underline{0}$ $\mathcal{B} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{n-k})$

5) Scrivere le soluzioni come $\bar{X} + \mathcal{L}(\mathcal{B})$.

4)

1) con il metodo di Gauss.

→ RIDURRE LE EQ. IN FORMA RREF



incognite corr. ad I
→ incognite

le altre sono parametri.

$$x_{i_1} = \qquad b_{i_1} +$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{bmatrix} = B' - M \begin{bmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_{n-k}} \end{bmatrix}$$

ove $\{i_1 \ldots i_k, j_1 \ldots j_{n-k}\} = \{1 \ldots n\}$.

2) Identificare un minore fondamentale M in A

Tenere solo le eq. intercettate da M.

Trattare le incognite che non corr. a colonne intercettate da M come parametri:

$$\rightarrow \quad M\begin{bmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{bmatrix} = B - M'\begin{bmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_k} \end{bmatrix}$$

Risolvere invertendo M

$$\begin{bmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{bmatrix} = M^{-1}B - M^{-1}M'\begin{bmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_k} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ 1 - y - y + z = 0 \end{cases}$$

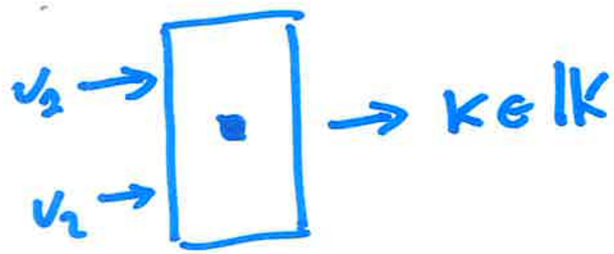
$$\begin{cases} z = 2y - 1 \\ x = 1 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 1y \\ y = 0 + 1y \\ z = -1 + 2y \end{cases}$$

$$(1, 0, -1) + \mathcal{L}((-1, 1, 2)) =$$

$$= (0, 1, 1) + \mathcal{L}((-1, 1, 2))$$

<u>prodotti scalari</u>, forme quadratiche e spazi vettoriali euclidei.



N.B: prodotto scalare $\neq$ ~~prop~~ prodotto **per** scalare

- $\cdot : V \times V \to \mathbb{K}$

$\mathbb{K} \times V \to V$

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ si dice <u>prodotto scalare</u> una <u>forma</u> <u>bilineare</u> <u>simmetrica</u> su V.

- ha $\mathbb{K}$ come codominio

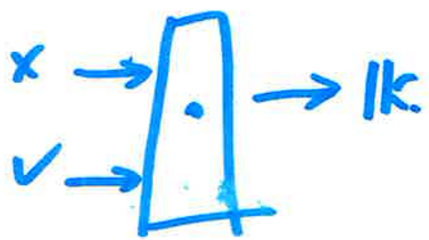
forma bilineare

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

tale che $\forall\, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$; $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

bilineare
$$\begin{cases} b(\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}, \bar{w}) = \alpha b(\bar{u}, \bar{w}) + \beta b(\bar{v}, \bar{w}) \\ b(\bar{u}, \alpha\bar{v}+\beta\bar{w}) = \alpha b(\bar{u}, \bar{v}) + \beta b(\bar{u}, \bar{w}). \end{cases}$$

simmetrica
$$b(\bar{v}, \bar{w}) = b(\bar{w}, \bar{v}).$$



OSS: è sempre possibile descrivere una forma bilineare simmetrica mediante una matrice quadrata.

Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V(\mathbb{K})$

b forma bilineare.

$\bar{v} = \sum_i x_i \bar{e}_i \qquad \bar{w} = \sum_j y_j e_j$

$$b(\bar{v}, \bar{w}) = b\left(\sum x_i \bar{e}_i, \sum y_j \bar{e}_j\right) =$$

$$= \sum_i x_i \, b\left(\bar{e}_i, \sum_j y_j \bar{e}_j\right) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j \, b(\bar{e}_i, \bar{e}_j) =$$

$$[x_1 \; x_2 \dots x_n] \underbrace{\begin{bmatrix} b(\bar{e}_1, \bar{e}_1) & \dots & b(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ b(\bar{e}_2, \bar{e}_1) & \dots & b(\bar{e}_2, \bar{e}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ b(\bar{e}_n, \bar{e}_1) & \dots & b(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

se b é simmetrica $\Rightarrow b(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = b(\bar{e}_j, \bar{e}_i)$

$\Rightarrow \quad B = {}^T B$

d'altro canto $\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$$b(\bar{v}, \bar{w}) = {}^T X B y = {}^T({}^T X B y) = ({}^T y\, {}^T B X) =$$
$$= ({}^T y B y) = b(\bar{w}, \bar{v}).$$

b bilineare simmetrica $\Leftrightarrow$ essa rispetto una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di $V(\mathbb{K})$ è rappresentata da una matrice simmetrica ${}^T B = B$.

A matrice di cambiamento di base

B matrice di una forma bilineare (simmetrica)

C matrice di un endomorfismo.

rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\begin{cases} X = AX' \\ Y = AY' \end{cases}$$

$${}^{T}X' B' Y' = {}^{T}X B Y =$$

ma $X = AX'$ $\quad Y = AY'$

$$= {}^{T}(AX') B (AY') = {}^{T}X' ({}^{T}A B A) Y'$$

$$\Rightarrow \boxed{B' = {}^{T}A B A}$$

$$\boxed{C' = A^{-1} C A}$$ endomorfismi.

$$A = \sum a_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|$$ matrice di endomorfismo

$$B = \sum b_{ij} \langle e_i|\langle e_j|$$

$$\bar{v} = \sum v_k |e_k\rangle \qquad A\bar{v} = \sum_{i,j,k} a_{ij} v_k |e_i\rangle\langle e_j|e_k\rangle$$

$$w = \sum w_e |e_e\rangle$$

$\langle e_j|e_k\rangle$ =

1 se $j=k$

0 se $j \neq k$

$$B\,\bar{v}\,\bar{w} = \cancel{\sum_{ij}} \sum_{i,j,k,e} b_{ij} v_k w_e \langle e_i|\underbrace{\langle e_j|e_k\rangle}|e_e\rangle$$

Def: Sia b un prodotto scalare.

- un vettore $\bar{v}$ è detto isotropo se $b(\bar{v},\bar{v})=0$
- due vettori $\bar{v},\bar{w}$ sono detti ortogonali (rispetto a b) se $b(\bar{v},\bar{w})=0$. In tale caso scriviamo $\bar{v} \perp \bar{w}$

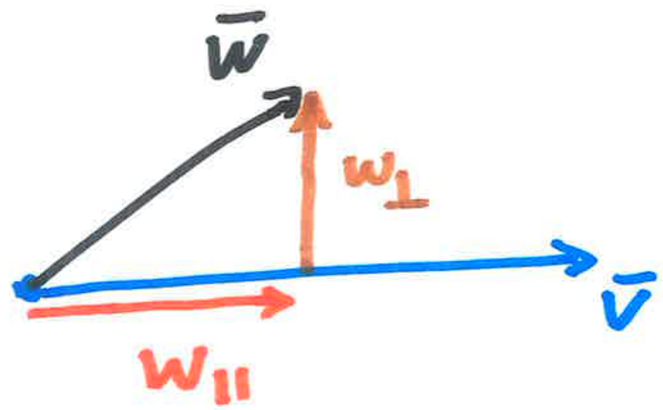
$\perp$ = "perp" oppure "ortogonale".

Teorema: Sia $\bar{v}$ un vettore non isotropo $(b(\bar{v},\bar{v})\neq 0)$ e $\bar{w}$ un qualsiasi vettore di $V(\mathbb{K})$.

Allora è sempre possibile scrivere

$$\bar{w} = \bar{w}_{\parallel} + \bar{w}_{\perp}$$

ove $\bar{w}_{\parallel} = \mathcal{L}(\bar{v})$ e $b(\bar{w}_{\perp},\bar{v})=0$



DIM: $\bar{w}_{\parallel} := \dfrac{b(\bar{v},\bar{w})}{b(\bar{v},\bar{v})}\bar{v}$ $\quad \bar{w}_\perp = \bar{w} - \bar{w}_{\parallel}$

ovvio: $\bar{w}_{\parallel} \in \mathcal{L}(\bar{v})$

$$b(\bar{w}_\perp,\bar{v}) = b(\bar{w},\bar{v}) - b(\bar{w}_{\parallel},\bar{v}) =$$

$$= b(\bar{w},\bar{v}) - \frac{b(\bar{v},\bar{w})}{b(\bar{v},\bar{v})} b(\bar{v},\bar{v}) = 0$$

perché b simmetrica. $\square$

Il vettore $\bar{w}_{\parallel}$ è detto **proiezione ortogonale** di $\bar{w}$ su $\bar{v}$ ed il valore $\dfrac{b(\bar{v},\bar{w})}{b(\bar{v},\bar{v})}$ è detto **coeff. di Fourier** di $\bar{w}$ rispetto a $\bar{v}$.

Esercizio: dimostrare che la funzione

$$\pi_{\bar{v}} : \begin{cases} V(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(\bar{v}) \\ \bar{w} \to \dfrac{b(\bar{v},\bar{w})}{b(\bar{v},\bar{v})}\bar{v} \end{cases}$$

é una funzione lineare

Sia $X \subseteq V(\mathbb{K})$. $\quad X^\perp := \{\bar{w} \in V(\mathbb{K}) : \forall \bar{v} \in X,\ \bar{w} \perp \bar{v}\}$.

Allora valgono le seguenti proprietà

1) $X^\perp \leqslant V(\mathbb{K})$

2) $X \subseteq X^{\perp\perp}$

3) Se non esistono vettori isotropi $\neq \underline{0}$ $\Rightarrow X^\perp \cap \mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\}$

e quindi $X^\perp \oplus \mathcal{L}(X)$.

DIM:

1) Siano $\underline{0} \in X^\perp \Rightarrow X^\perp \neq \emptyset$

$\bar{a}, \bar{b} \in X^\perp \Rightarrow \forall \bar{x} \in X : b(\bar{x}, \bar{a}) = b(\bar{x}, \bar{b}) = 0$

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \ \alpha b(\bar{x}, \bar{a}) + \beta b(\bar{x}, \bar{b}) = 0$

$\qquad\qquad \| $

$\quad b(\bar{x}, \alpha\bar{a} + \beta\bar{b})$

$\Rightarrow \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \in X^\perp$.

2) Sia $\forall \bar{x} \in X \Rightarrow \forall \bar{w} \in X^{\perp} : b(\bar{x}, \bar{w}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b(\bar{w}, \bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{w} \in X^{\perp} \Rightarrow x \in X^{\perp\perp} =$

$= \{ \bar{z} \mid b(\bar{w}, \bar{z}) = 0 \ \forall \bar{w} \in X^{\perp} \}.$

3) Supponiamo $\bar{x} \in X^{\perp} \cap \mathcal{L}(X) \Rightarrow b(\bar{x}, \bar{x}) = 0$

in quanto $\bar{x} \in X^{\perp} \Rightarrow b(\bar{x}, \bar{w}) = 0 \quad \forall \bar{w} \in X$

e dunque in particolare $b(\bar{x}, \sum \alpha_i \bar{w}_i) = 0$

$\forall$ comb. lineare di vettori di $X \Rightarrow$ se

$\bar{x} \in \mathcal{L}(X) : b(\bar{x}, \bar{x}) = 0$

$\square$.

$\Rightarrow \bar{x} = \underline{0}.$

<u>Def</u>: Si dice <u>prodotto scalare standard</u> su $V_n(\mathbb{K})$ risp. $\mathcal{B}$ il prodotto scalare indotto dalla matrice identica.

$\mathbb{K}^n \quad \mathcal{B} = (\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n)$

$$(x_1 \dots x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prod. scalare}}}{*} (y_1 \dots y_n) = \sum x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$(x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Supponiamo $AX = B$ sia un sistema lineare.

$$\begin{cases} a_{11}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad X = (x_1 \dots x_n)$$

$$\begin{cases} (a_{11} \dots a_{1n}) \cdot X = b_1 \\ (a_{21} \dots a_{2n}) \cdot X = b_2 \\ \vdots \\ (a_{m1} \dots a_{mn}) \cdot X = b_m \end{cases}$$

Sia ora $B = \underline{0}$ cioè $b_1 = b_2 = \dots b_m = 0$ $\quad AX = \underline{0}$

$$(*)\quad \begin{cases} (a_{11} \dots a_{1n}) \cdot X = 0 \\ (a_{21} \dots a_{2n}) \cdot X = 0 \\ \vdots \\ (a_{m1} \dots a_{mn}) \cdot X = 0 \end{cases}$$

$X \in \{\overline{a}_1, \overline{a}_2 \dots \overline{a}_m\}^\perp$ se e solo se X è soluzione di $AX=0$

calcolare la eq. lineare del comp. ortogonale (rispetto prod. scal standard di $\mathbb{R}^n$) delle sol.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z - 7t = 0 \\ 2y + 3z + 11t = 0 \end{cases}$$

$$S = \{(3\ 2\ 5\ -7), (0\ 2\ 3\ 11)\}^\perp$$

$$S^\perp = \{(3\ 2\ 5\ -7), (0\ 2\ 3\ 11)\}^{\perp\perp} = \mathcal{L}((3\ 2\ 5\ -7), (0\ 2\ 3\ 11))$$

proiezione ortogonale

$$|w\rangle \to \frac{|v\rangle\langle v|}{\langle \bar{v}|\bar{v}\rangle}|w\rangle$$

$\langle v|\langle w$??

$|x\rangle|y\rangle$

la matrice corrispondente

è

$$\frac{1}{\sum v_i^2}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \cdots v_n \end{bmatrix} = \frac{|v\rangle\langle v|}{\langle \bar{v}|\bar{v}\rangle}$$

Def: Un prodotto scalare (una forma bilineare) è degenere se $\exists\ \bar{v} \in V(\mathbb{K})$ $\bar{v} \neq \underline{0}$ tale che $\bar{v} \in V^{\perp}$

Non degenere se questo non accade.

N.B.: Si dice radicale di una forma bilineare l'insieme $\mathrm{Rad}(f) := V^{\perp}$

OSS:
1) $\mathrm{Rad}(b) \leq V^{\perp}$
2) Sia $\mathcal{B}$ una base, b bilineare e simmetrica
$\Rightarrow \mathrm{Rad}(b) = \mathrm{Ker}\, B$ ove B è la matrice di b rispetto $\mathcal{B}$.

2) Se $\bar{v} \in \ker B \Rightarrow \forall \bar{x} \in V(\mathbb{K})$

$${}^T\bar{x} B \bar{v} = {}^T\bar{x} \cdot \underline{0} = 0$$

viceversa se $B\bar{v} \neq \underline{0} \Rightarrow \exists$ una componente i-esima in $B\bar{v} \neq 0$ ed

$${}^Te_i B \bar{v} \neq 0$$

⌜ Un prodotto scalare è non degenere $\Leftrightarrow$ la matrice che lo rappresenta rispetto una qualsiasi base ha $\det \neq 0$. ⌟

CHIARAMENTE: prod. scal. std. $\to$ è non degenere perché rapp. da I.

<u>Teorema</u>: Sia $\bullet : V(\mathbb{K}) \times V(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ un prod. scalare <u>non degenere</u>.

Allora dato $X \subseteq V(\mathbb{K})$

$k = \dim(\mathcal{L}X)$

$n = \dim(V(\mathbb{K}))$

$$\dim X^{\perp} = n - k.$$

In particolare $\dim X^{\perp\perp} = n - (n-k) = k$

e dunque $X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$.

DIM: Teorema nullità più rango.

→ Fissiamo una base $\mathcal{B}$ e sia B la matrice del prodotto rispetto a tale base.

~~Definizione~~

$$X^{\perp} = \{ \bar{y} \in V(\mathbb{K}) : {}^{T}\bar{y} \underbrace{B\bar{x}}_{\text{vettore colonna}} = 0 \ \forall \bar{x} \in X \}.$$

= insieme soluzioni del sistema omogeneo di eq. date da $B\bar{x}$ al variare di $\bar{x}$ in X.

poiché B è invertibile il rango della matrice di questo sistema coincide col numero di vettori linearmente indipendenti in X

$= k = \dim \mathcal{L}(X)$.

per nullità + rango $\dim X^\perp = n-k$ $\square$

OSS: le eq. del sistema sono $\{B\bar{x} \mid \bar{x} \in X\}$.

ma le eq. indipendenti sono ~~date~~ in numero tante quante i vettori di una base di $\mathcal{L}(X)$ in quanto l'applicazione lineare $\bar{x} \mapsto B\bar{x}$ manda seq. indip. in seq. indipendenti.

$\dim \mathcal{L}(X) = k$

B invertibile

$\dim V = n$

$\dim X^{\perp} = n - k$

1) $X^{\perp} = \mathcal{L}(X)^{\perp}$ infatti

$\bar{y} \in X^{\perp} \iff \bar{y} \perp \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in X$

$\iff \bar{y} \perp \sum \alpha_i \bar{x}_i \quad \forall \bar{x}_i \in X$

2) $X^{\perp} = \{ \bar{y} \in V : {}^T\bar{y} B \bar{x} = 0 \quad \forall \bar{x} \in X \} =$

$= \{ \bar{y} \in V : {}^T\bar{y} (B\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in X \} =$

$= \{ \bar{y} \in V : {}^T\bar{y}\, \bar{z} = 0 \quad \forall \bar{z} \in BX \}$

immagine di X con app. indotta da B

3) B invertibile $\Rightarrow \dim(B\mathcal{L}(X)) = \dim \mathcal{L}(X) = k$

4) $X^\perp$ è soluzione di un sistema omogeneo di rango k

$\Rightarrow \dim X^\perp = n-k.$

$\rightarrow \dim X^{\perp\perp} = n - \dim X^\perp = n-(n-k) = k$

$\rightarrow$ in generale $\mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp}$ ma

$\dim \mathcal{L}(X) = k = \dim X^{\perp\perp} \Rightarrow \mathcal{L}(X) = X^{\perp\perp}$

$\square$