Rango di una matrice M =

= dim s.vettoriale generato dalle colonne di M

= dim. s.vettoriale generato dalle righe di M

= ordine max di un minore quadrato contenuto in M con $\det \neq 0$.

→ Sia M una matrice e sia C un suo minore $k \times k$ con $\det C \neq 0$ e $\rho(M) = k$

⇒ le colonne di M intercettate da C sono una base di $\mathcal{C}(M)$ = s.vett. gen. colonne di M.

le righe di M intercettate da C sono una base di $\mathcal{R}(M)$ = s. vett. gen. dalle righe di M.

Teorema degli orlati.

Sia $M \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice.

Allora $\rho(M) = k$ se e solamente se M contiene un minore $C \in GL(n, \mathbb{K})$ con det diverso da 0 e ogni minore $C' \in \mathbb{K}^{k+1,k+1}$ che contiene C ha $\det = 0$.

DIM: Se $\rho(M) = k \Rightarrow$ ~~ogni~~ esiste almeno un minore C $k \times k$ con $\det \neq 0$ e ogni minore $(k+1) \times (k+1)$ ha $\det = 0$. In particolare quelli che contengono $C \Rightarrow$ ok $\square$

[se $C \in \mathbb{K}^{k,k}$ un orlato di C è un minore $(k+1) \times (k+1)$ che contiene C]

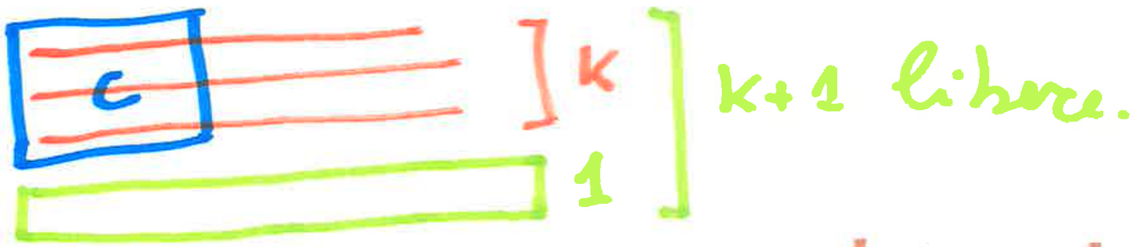
IP: • C minore di M $k \times k$ con $\det(C) \neq 0$

•• ogni orlato di C ha $\det = 0$

Ts: il rango di M è K.

DIM: Supponiamo per assurdo $\rho(M) \geq K+1 > K$

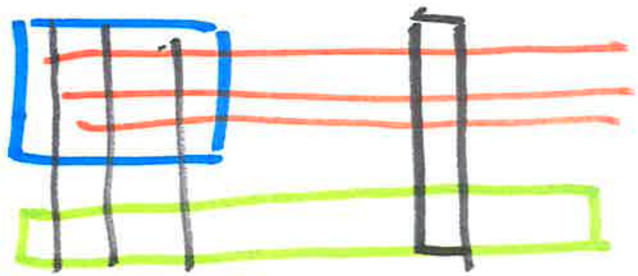
→ osserviamo che le righe di M intercettate da C sono un sistema libero di k vettori ⇒ $\exists$ almeno un'altra riga in M indipendente da queste e aggiungendola alle k precedenti si ottiene un sistema libero di $k+1$ vettori

$M' =$ 

ragioniamo ora per colonne. In M' le colonne intercettate da C sono un sistema libero.

ma $\dim \mathcal{C}(M') = \dim \mathcal{R}(M') = k+1$

$\Rightarrow \exists$ in M' una colonna che si può aggiungere alle colonne di M' intersecate da C per avere una base di $\mathcal{C}(M')$.



Ma in questo modo otteniamo un minore $(k+1) \times (k+1)$ che contiene C ed ha $\det \neq 0$ $\Rightarrow$ ↯ contro l'ipotesi

$\Rightarrow \rho(M) = k$ $\square$

Sia $M \in \mathbb{K}^{m,n} \to \rho(M)$ con teorema degli orlati:

1) $i \leftarrow 1$

2) $\forall$ i minori $(i \times i)$ sono a $\det = 0$? $\Rightarrow rk = i - 1$

3) Scegliamo un minore $(i \times i)$ con $\det \neq 0$ C

4) $\forall$ orlato di C ha $\det = 0 \Rightarrow rk(M) = i$

5) ~~sia~~ sostituisco a C un suo orlato con $\det \neq 0$; $i \leftarrow i + 1$

si ritorna al passaggio 4.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 6 & 10 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 7 \end{bmatrix} \to rk = 3$$

$$
rk \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 6 & 10 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 7 \end{bmatrix} = rk \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} =
$$

$$
= rk \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} =
$$

$$
= rk \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 3
$$

$$
\parallel
$$

Row Reduced Echelon Form.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 4 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

STUDIO E RISOLUZIONE DEI SISTEMI LINEARI

Def: Un sistema lineare di m equazioni in n incognite è una collezione di m equazioni di primo grado in indeterminate $x_1 \dots x_n$ a coeff. in un campo $\mathbb{K}$.

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{11}x_1 = b_1$ (una eq. in una incognita).

$a_{11} = b_1 = 0 \Rightarrow$ ci sono ∞ sol. $\forall x \in \mathbb{K}$

$a_{11} = 0;\ b_1 \neq 0 \Rightarrow$ non $\exists$ soluzioni

$a_{11} \neq 0 \Rightarrow x_1 = a_{11}^{-1} b_1$ è l'unica soluzione.

Def: Un vettore $S \in \mathbb{K}^n$ è detto <u>soluzione</u> di un sistema lineare (*) se sostituendo ai vari simboli $(x_1 \dots x_n)$ in (*) i valori $(s_1 \dots s_n) = S$ delle componenti di S tutte le uguaglianze sono soddisfatte.

(*) si può riscrivere come $\boxed{AX = B}$

ove $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ è la matrice degli a_{ij}

$B \in \mathbb{K}^{m,1}$ è la matrice $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Teorema (Rouché-Capelli).

Sia (*) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

un sistema lineare. Sia $A = ((a_{ij}))$ la matrice dei suoi coeff. (A è detta matrice incompleta del sistema) $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ la matrice dei suoi termini noti e

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ il vettore delle incognite.

Allora il sistema $AX = B$ è compatibile (cioè <u>ammette soluzione</u>) $\Leftrightarrow \rho(A) = \rho(A|B)$

ove $A|B$ è la matrice ottenuta da A giustapponendo il vettore dei termini noti ed è detta <u>matrice completa</u> del sistema.

$\rho(M) = rk(M)$

<u>DIM</u>: consideriamo la funzione lineare

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$$

Il nostro sistema è compatibile $\Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{K}^n$ tale che $f_A(S) = B$. Questo $\exists \Leftrightarrow B \in Im\, f_A$

$B \in Im(f_A) \Leftrightarrow B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow$

$$\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(B, \mathcal{C}(A))$$

$\quad\; \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$rk(A) \qquad\qquad\qquad\quad rk(A|B)$ in quanto le colonne di A generano $\mathcal{C}(A)$. $\square$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) la prima entrata $\neq 0$ di ogni riga è 1

2) nella colonna che corrisponde ad una prima entrata $\neq 0$ di riga c'è solamente un valore $\neq 0$ ed è 1

3) la prima entrata non nulla di una riga successiva ad una data deve essere più a destra.

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

$$GL(n, \mathbb{K}) := \{ M \in \mathbb{K}^{n,n} \mid \det(M) \neq 0 \}.$$

DIMENSIONE : si applica a s.vett.

RANGO
- di appl. lin = dim Im f
- di matrici = ordine max di un minore quad con det $\neq 0$

= dim s.vett. gen dalle colonne di A
=
dim. s.vett. gen dalle righe di A

=
numero minimo di matrici di rk = 1 ~~tale~~ la cui somma dà M.

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} =$$

$$= s_1 C_1 + s_2 C_2 + \dots + s_n C_n \quad = B \iff B \in \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$$

OSS: In generale $\bar{v} \in W \iff \dim W = \dim \mathcal{L}\{\bar{v}, W\}$.

Sia $(*)$: $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ un sistema lineare.

le soluzioni di $(*)$ dipendono solamente dallo spazio vettoriale generato dalle equazioni del sistema.

Def: Un sistema lineare è <u>compatibile</u> $\Leftrightarrow$ esso ammette almeno una soluzione.

Due sistemi lineari sono <u>equivalenti</u> $\Leftrightarrow$ sono compatibili e ammettono le medesime soluzioni.

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$ $\quad \alpha \cdot (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1) =$

$$\alpha a_{11}x_1 + \dots \alpha a_{1n}x_n = \alpha b_1$$

$$(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1) +$$
$$(a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2) =$$
$$((a_{11} + a_{21})x_1 + \dots + (a_{1n} + a_{2n})x_n = b_1 + b_2)$$

Sia (*) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

supponiamo $(s_1 \dots s_n)$ soluzione di (*).

$\Rightarrow$ mostriamo che $(s_1 \dots s_n)$ è anche sol. del sistema lineare in cui sostituiamo una sua eq. con la stessa più una c. lineare delle rimanenti ovvero moltiplichiamo la stessa per uno scalare non nullo.

$$a_{11}s_1 + \dots + a_{1n}s_n = b_1$$

$$a_{21}s_1 + \dots + a_{2n}s_n = b_2$$

$$(\alpha a_{11} + \beta a_{21})s_1 + \dots + (\alpha a_{1n} + \beta a_{2n})s_n = \alpha b_1 + \beta b_2$$

viceversa: supponiamo che

$(s_1 \dots s_n)$ soddisfi tutte le equazioni di

$\mathcal{L}(a_{11}x_1 - \dots = b_1, \; a_{m1}x_1 - \dots = b_m) \Rightarrow$

in particolare soddisfa le equazioni date e quindi è soluzione del sistema.

Se il sistema è compatibile $\Rightarrow$ ok

Se il sistema non è compatibile $\emptyset = \emptyset$.

→ Metodo per risolvere i sistemi lineari.

partire da un sistema (*) → trovare una base dello s. vettoriale generato dalle eq. di (*)

→ risolvere questo sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

equiv a risolvere tutte le equazioni in

$$\mathcal{L}(x_1+2x_2=2,\ 2x_1+4x_2=4,\ 6x_1+3x_2=6)$$

equivalente a risolvere tutte le eq.

$$\mathcal{L}(x_1+2x_2=2)$$

equivalente a risolvere

$$x_1+2x_2=2$$

Il sistema che si ottiene da una base dello s.vett. delle soluzioni di (*) è detto <u>sistema principale equivalente</u>.

Teorema (di struttura delle soluzioni di $AX=B$).

Sia $AX=B$ un sistema lineare compatibile.

1) ALLORA ~~OGNI~~ TUTTE E SOLE LE SOLUZIONI DI $AX=B$ si scrivono come $\bar{X}+Z$ ove $\bar{X}$ è una soluzione particolare fissata di $AX=B$, Z è una soluzione del sistema omogeneo associato $AX=\underline{0}$.

2) Le soluzioni di $AX=\underline{0}$ sono uno sp. vettoriale di dimensione $n-k$ ove $k=rk(A)=rk(A|B)$.
$n=$ numero incognite

DIM: (2) $\{X \mid AX=\underline{0}\} = \operatorname{Ker} f_A \leq \mathbb{K}^n$

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f_A}_{=} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f_A}_{= rk(A)=k} = n$$

$\dim \operatorname{Ker} f_A = n-k$.

(1) Supponiamo $\bar{X}$ soluzione di $AX = B$

Z soluzione di $AX = \underline{0}$

$$\Rightarrow A(\bar{X}+Z) = A\bar{X} + AZ = B + \underline{0} = B$$

quindi $\bar{X}+Z$ è soluzione di (*).

Viceversa: Se $\bar{X}, \bar{\bar{X}}$ sono 2 soluzioni di

$$(*) \Rightarrow A\bar{X} = B = A\bar{\bar{X}} \Rightarrow$$

$$A\bar{X} - A\bar{\bar{X}} = A(\bar{X} - \bar{\bar{X}}) = B - B = \underline{0}$$

$\Rightarrow Z = \bar{X} - \bar{\bar{X}}$ è soluzione di $AX = \underline{0}$

e $\bar{\bar{X}} = \bar{X} - Z$ $\square$

Il teorema corrisponde a calcolare tutte le possibili preimmagini di B secondo $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

e noi sappiamo che queste preimm. diff. a meno di un vettore del nucleo.

per comodità scriverò

$$\ker(A) := \{ X \mid AX = \underline{0} \}.$$

<u>OSS</u>: In generale se S = insieme soluzioni di $AX = B$.

$$S \leq \mathbb{K}^n \iff B = \underline{0}.$$

<u>DIM</u>: Se $B = \underline{0} \Rightarrow S = \ker(A) \leq \mathbb{K}^n$

se $B \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{0} \notin S \Rightarrow S$ non è sottospazio $\square$

Le soluzioni di un sistema lineare si possono sempre scrivere come

$$S = \overline{X} + \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\ker A}) =$$

$= \{ \bar{X} + Z \mid AZ = \underline{0} \}.$

$Ker(A) := \mathcal{L}(\mathcal{B})$

↳ numero finito di elementi $\quad n-k$

$\bar{X}$ = una soluzione fissata.

$\Rightarrow$ con $n-k+1$ vettori possiamo descrivere $\forall$ soluzione.

---

metodo 1 (Gauss-Jordan).

- scegliere una base opportuna per lo s. vettoriale delle equazioni e poi "leggere" la soluzione.

Siano $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ dei vettori di $\mathbb{K}^{n+1}$ allora è sempre possibile trovare una base di $\mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$

in forma ridotta a scalini

$\Rightarrow$ vuol dire che mem. a matrice i vettori di tale base.

1) la prima entrata $\neq 0$ in ogni riga è 1

2) $\forall$ riga le righe seguenti hanno prima entrata non nulla a dx della sua

3) al di sopra di ogni 1 che è prima entrata non nulla di una riga e al di sotto ci sono solo 0.

$$\begin{bmatrix} 0&0&2&3&5&1\\ 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&0\\ 0&0&2&3&5&1\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&2&3&5&1\\ 0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&1&3/2&5/2&1/2\\ 0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&-3/2&-\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\ 0&1&0&-3&-5&-1\\ 0&0&1&3/2&\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\ 0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$A \qquad\qquad B$$

le soluzioni di $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B$

sono le stesse di $(A|B) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$

$$
\begin{aligned}
2x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 1 \\
x_1 + x_3 &= 0 \\
x_2 + 2x_3 &= 0 \\
x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

equiv.

$$
\begin{aligned}
x_1 - \tfrac{5}{2}x_5 &= -\tfrac{1}{2} \\
x_2 - 5x_5 &= -1 \\
x_3 + \tfrac{5}{2}x_5 &= \tfrac{1}{2} \\
x_4 - 0x_5 &= 0 \\
x_5 - x_5 &= 0
\end{aligned}
\quad \rightarrow \quad
\begin{aligned}
x_1 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2}x_5 \\
x_2 &= -1 + 5x_5 \\
x_3 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2}x_5 \\
x_4 &= 0 - 0x_5 \\
x_5 &= 0 + 1x_5
\end{aligned}
$$

sol particolare

sol. sistema omogeneo associato.

Riduzione a sist. principale equiv. + formula di Cramer.

<u>Teorema</u>: Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Allora il sistema lineare

$$AX = B$$

ammette una ed una sola soluzione

$\iff \det A \neq 0$.

<u>DIM</u>: Se $\det A \neq 0 \Rightarrow$ $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$$A^{-1}(AX) = IX = X$$

esiste una soluzione.

Se ce ne fossero 2 $\Rightarrow$ $AX = B = AX' \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(AX') \Rightarrow X = X'$ $\square$

Se $\det A = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker}(A) \neq \{0\}$.

ci sono 2 possibilità $\rho(A) = \rho(A|B)$

ma allora ci sono più di una soluzione

(almeno tante quante i vettori di $\operatorname{Ker}(A)$)

oppure $\rho(A) \neq \rho(A|B) \Rightarrow S = \emptyset$ $\square$.

__Def__: Un sistema lineare ~~con~~ $AX = B$ con $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ e $\det(A) \neq 0$ è detto __sistema di Cramer__.

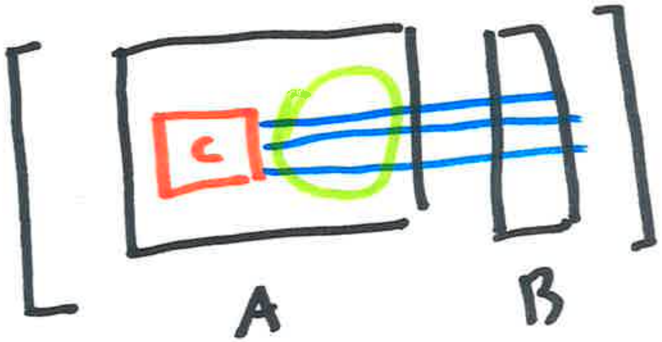
$ax = b$

$x = a^{-1} b$

$AX = B$

$X = A^{-1} B$

__N.B__ __NON__ $\cancel{X = BA^{-1}}$



$AX = B$

C minore di A di ordine max con $\det \neq 0$; $rk(A) = rk(A|B)$.

le righe intercettate da C sono una base di $\mathcal{R}_o(A|B)$ e quindi sono una base dello s. vett. delle equazioni.

Trattiamo le colonne non intercettate da C come parametri e riscriviamo il sistema come

$$\boxed{CX' = B - \hat{A}X''}$$

ove X' = vett. incognite che corr. alle colonne int. da C
X'' = altre incognite $\hat{A}$ coeff. corr. ad X''

ma $CX' = B - \hat{A}X''$ é di cramer.

$$X' = C^{-1}B - C^{-1}\hat{A}X''$$

con X'' vettore di $n - rk(A)$ parametri.

- $C^{-1}B$ = soluzione particolare
- da $C^{-1}\hat{A}X''$ si deduce una base per $Ker(A)$.

Def: Dato un sistema lineare $AX=B$ compatibile si dice che esso ha ∞^{n-k} soluzioni se $\dim Ker(A) = n-k$.

In altre parole un sistema lineare ha ∞^{n-k} soluzioni

$\iff$ le sue soluzioni dipendono da $n-k$ parametri:

$n = \#$ incognite $\qquad \infty^0 = 1$

$k = rk(A) = rk(A|B)$.

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

OSS: Un sistema di Cramer OMOGENEO ha come unica soluzione $\underline{0}$.

In generale dato $AX=\underline{0}$ sistema lineare omogeneo si dice autosoluzione di $AX=\underline{0}$ ogni soluzione diversa da quella $(0\,0\ldots 0)$ banale.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$x -$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0$$

$$x = -y$$

$$y = y$$

$$S = \{(-y, y) \mid y \in \mathbb{K}\} = \mathcal{L}((-1, 1))$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x+y=1$

$$\begin{aligned} x &= 1-y \\ y &= y \end{aligned}$$

$$S = \{(1-y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} =$$

$$\begin{aligned} x &= 1-y \\ y &= 0+y \end{aligned}$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol. part.}}}{(1,0)} + \mathcal{L}\Big(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol omog. associato.}}}{(-1,1)}\Big)$$