Determinanti e rango

Det è univocamente definito dalle proprietà di essere

1) multilineare
2) quando 2 colonne sono uguali pari a 0
3) $\det(I_n) = 1$

$\mathrm{Det}(M) = 0$ se in M ci sono colonne linearm. dipendenti

Se ~~le~~ colonne di M sono un sistema libero.

$\det(M) = \det(I)\, d_1 \dots d_n$ con $d_1 \dots d_n$ opportuni scalari $\neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 C_1 + a_2 C_2 + \dots + a_n C_n$$ ove C_i sono le colonne di A.

supponiamo $\quad a_1 \neq 0 \Rightarrow \det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \boxed{C_2 \dots C_n} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} a_1^{-1}$

C_1'

$$a_1 C_1 = a_2 C_2 + \dots + a_n C_n - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left[C_1 \dots C_n \right] = \det\left[a_1 C_1 \; C_2 \dots C_n \right] a_1^{-1} =$$

$$= \det\left[a_1 C_1 + a_2 C_2 + \dots + a_n C_n \quad C_2 \dots C_n \right] a_1^{-1}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & C_2 & C_3 & \dots & C_n \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} a_1^{-1} .$$

ALGORITMO DI GAUSS.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se $a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$

$\Rightarrow \det(A) = 0$

se no cerchiamo la prima entrata non nulla nella prima riga di A.

se essa è a_{11} $\Rightarrow A' = A$ $\quad \det(A') = \det(A)$

se essa è a_{1i} con $i > 1$ $\Rightarrow A'$ = matrice con colonna 1 ed i di A scambiate e $\det(A) = -\det(A')$

CALCOLIAMO DET(A') sostituiamo ad A' una matrice A'' in cui ad ogni colonna C_i' successiva alla prima in A' sottraiamo $C_1' \cdot a_{11}'^{-1} \cdot a_{1i}$

$$A'' = \begin{bmatrix} a_{11}' & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}' & a_{22}'' & & \cdots & a_{2n}'' \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{n1}' & a_{n2}'' & & \cdots & a_{nn}'' \end{bmatrix}$$

$$\det(A'') = \det(A') = a_{11}' \det \begin{bmatrix} a_{22}'' & \cdots & a_{2n}'' \\ \vdots & & \\ a_{n2}'' & \cdots & a_{nn}'' \end{bmatrix}$$

Quante op. costa questo algoritmo.

n prodotti di una colonna per uno scalare $\rightarrow n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1 \approx n^3$

Con Laplace I:

$$\det(a_{11}) = a_{11}$$

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

$\rightarrow$ A é $n \times n$ si devono calcolare $\cancel{(n-1)}$ n det. di matrici $(n-1) \times (n-1)$

$\forall$ $(n-1)$ det. di matrici $(n-2) \cdot (n-2)$

$$\approx n! \gg n^3$$

<u>OSS</u>: 1) Sia A una matrice $n \times n \Rightarrow$

$$\det(A) = \det({}^{t}A)$$

(segue dalla formula di Laplace)

2) $\det(A) \neq 0 \iff$ le righe/colonne di A sono una base di $\mathbb{K}^n$ (cioè sono indip.).

<u>DIM</u>: Se sono legate $\Rightarrow \det A = \det A'$ in cui c'è una colonna di $0 \rightarrow \det A' = 0$

Se sono libere $\det A = \det(I)\, a_1 \cdots a_n$ con $a_1 \cdots a_n$ opportuni scalari non nulli.

3) $\det(A) \neq 0$ se e solamente se A è invertibile come matrice.

DIM: Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$.

Una matrice A è invertibile $\Leftrightarrow$ la funzione lineare $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ X \to AX \end{cases}$

è invertibile.

Ma f_A è invertibile $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} f = n$

(e dunque $\dim \operatorname{Ker} f = 0$)

Ma $\dim \operatorname{Im} f = n$ $\Leftrightarrow$ l'immagine di $\mathcal{B}$ base canonica di $\mathbb{K}^n$ è una base di $\mathbb{K}^n$

$\Leftrightarrow$ le colonne della matrice A (che corrispondono all'immagine risp. di $\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n$) sono libere

$\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$ $\square$

<u>OSS:</u> $(C_1 C_2 \dots C_n) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_i$

i-esima

#

4) Teorema di Binét Se $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$:

$$\underline{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}$$

Se A é invertibile $\Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) =$

$$= \det I = 1$$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ se $\det(A) \neq 0$.

CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA.

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$ $\qquad \det(A) \neq 0.$

II Teorema di Laplace.

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ poniamo $\Gamma_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \Gamma_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ \det(A) & \text{se } k = j \end{cases}$$

<u>DIM</u> $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \Gamma_{ij} = \det(A')$ in cui si è sostituita alla j-esima colonna ± una copia della i-esima colonna $\Rightarrow \det A' = 0$ □

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sum a_{ij}(-1)^{i+j} A_{ij} \left| \ddots \right|$$

$k=1$

$j=2$

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i1} \Gamma_{i2} =$$

$$= \overset{+}{\underset{\sim}{a_{11}}}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \overset{-}{\underset{\sim}{a_{21}}}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \overset{+}{a_{31}}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

uguali

$$= \begin{vmatrix} -a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ -a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ -a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Teorema: Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.

poniamo $$A^a = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{1n} \\ \vdots & & & \\ \Gamma_{n1} & \Gamma_{n2} & \cdots & \Gamma_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot {}^T\!A^a = \det(A)\, I_n$$

DIM l'entrata in posizione (i,j) in $A \cdot {}^T\!A^a$

é proprio $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \Gamma_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \det A & \text{se } i = j \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ABBIAMO CHE $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot {}^T\!A^a$.

$\square$

Applichiamo le seguenti op. fondamentali ad A

1) scambio di righe
2) somma ad una riga di una c. lineare delle rimanenti
3) prodotto di una riga con uno scalare.

e ne teniamo traccia applicando le stesse operazioni ad una copia della matrice I.

→ AL TERMINE AVREMO

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = B_2 A$$

$$\shortparallel \; B_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha a_{21} & a_{12} + \alpha a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = B_3 A$$

$$\shortparallel \; B_3$$

$$\vdots$$

$$A^{-1} \qquad I$$

$A^{-1}\ \boxed{}$ $\qquad I\ \boxed{}$

$I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B_1$

$$B_1 A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

det è definito <u>solo</u> per matrici quadrate!

Supponiamo di avere $(n-1)$ vettori in $\mathbb{K}^n$

e che questi $n-1$ vettori siano liberi

v_{11} v_1 v_{1n}

$$\det \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1\,n-1} & \\ v_{21} & v_{22} & & \vdots & \bar{e}_i \\ \vdots & \vdots & & & \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{n\,n-1} & \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \exists\, e_i :$$

$= \pm \det A_{ij}$

$\Rightarrow$ esiste un minore della matrice delle comp. dei $\bar{v}_i$ $(n-1)\times(n-1)$ con $\det \neq 0$.

__Def:__ Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Si dice __rango__ di A l'ordine massimo di un minore quadrato di A con $\det \neq 0$.

$rk(A) = \ell \iff \exists$ un minore M $\ell \times \ell$ in A con $\det M \neq 0$ ed ogni minore $k \times k$ con $k > \ell$ ha $\det = 0$.

Teorema (di Kronecker)

$$rk(A) = rk(f_A) = \dim Im(f_A)$$

$rk(A) = \dim$ spazio vettoriale generato dalle colonne di A =

= dim sp. vettoriale generato dalle righe di A.

~~dunque~~ $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{R}(A) = rk(A)$

$\mathcal{C}(A)$: sp. vett. gen da colonne

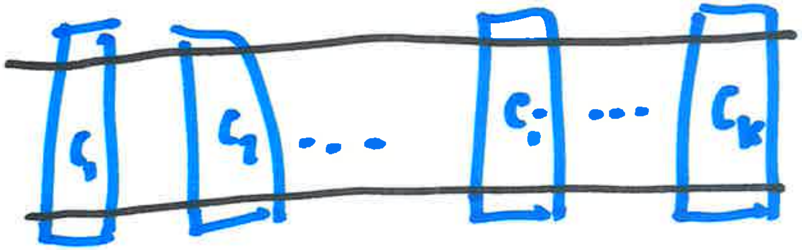
$\mathcal{R}(A)$: sp. vett. gen. da righe.

N.B. In generale $\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{R}(A)$.

DIM: Lo spazio vett. $Im(f_A)$ è generato dalle colonne di A $\Rightarrow \dim Im(f_A) = \dim \mathcal{C}(A)$
$= rk\, f_A$.

Lemma: Siano $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ k-vettori di $\mathbb{K}^n$
$\Rightarrow$ $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ sono liberi $\Leftrightarrow$ la matrice che contiene i $\bar{v}_i$ come colonne (righe) ha un minore $k \times k$ con $\det \neq 0$.

DIM: Se i $\bar{v}_i$ sono legati $\Rightarrow$ uno di essi è c. lineare dei rimanenti $\Rightarrow$ ogni minore della matrice $k \times k$ contiene una colonna che è c. lineare delle rimanenti $\Rightarrow$ $\forall$ minore $k \times k$ ha $\det = 0$.

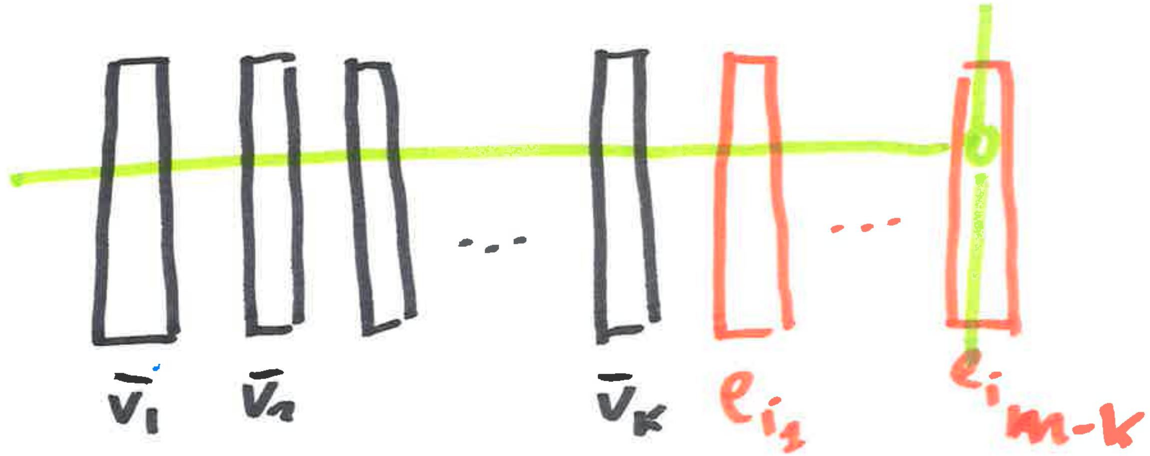


$$c_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j c_j$$

se i $\bar{v}_i$ sono liberi $\Rightarrow$ possiamo trovare dei vettori $e_{i_1} \dots e_{i_{n-k}}$ nella base canonica di $\mathbb{K}^n$ che li completano a base

$\Rightarrow A = (\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \dots \bar{v}_k\ \bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_{n-k}})$ è base di $\mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ la matrice associata ha $\det \neq 0$



$\det A =$
$\pm \det A_{i_{n-k}\,n}$

calcoliamo il det con laplace partendo dall'ultima col.

si procede in tale modo per $n-k$ colonne

$\Rightarrow$ ALLA FINE SI OTTIENE $\det A = \pm \det M$

ove M é ottenuto da A cancellando le ultime $n-k$ colonne e le righe $i_1 \dots i_{n-k}$

$\Rightarrow M$ é un minore $k \times k$ contenuto nella matrice dei $\overline{v}_i$. e $\det M \neq 0$. $\square$

$\overline{v}_1 = (1\,2\,0\,1\,0\,1)$

$\overline{v}_2 = (0\,1\,3\,0\,1\,0)$

$v_3 = (0\,0\,0\,1\,1\,2)$

$$\det \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1&0&0\\2&1&0\end{matrix}} & 0 & 0 & 0 \\ 0\;\;3\;\;0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1\;\;0\;\;1} & 0 & 0 & 0 \\ 0\;\;1\;\;1 & 0 & 1 & 0 \\ 1\;\;0\;\;2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \pm \det \begin{bmatrix} 1&0&0\\2&1&0\\1&0&1 \end{bmatrix} \neq 0$$

DIM (teorema).

Sia A una matrice e supponiamo $rk(A) = \rho$.

Allora $\dim \mathcal{C}(A) = \rho$ infatti se $\dim \mathcal{C}(A) > \rho \Rightarrow$ esisterebbero in A almeno $\rho+1$ colonne indip $\Rightarrow$ ci sarebbe per il lemma un minore $(\rho+1) \times (\rho+1)$ con $\det \neq 0$ (prendendo solo queste colonne!).

Viceversa: non può essere $\dim \mathcal{C}(A) < \rho$ perché le ρ colonne di A intersecate da un minore $\rho \times \rho$ con $\det \neq 0$ sono un sistema libero (per il lemma) $\Rightarrow \mathcal{C}(A)$ conterrebbe $\rho > \dim \mathcal{C}(A)$ colonne indip. ↯

$\Rightarrow \dim \mathcal{C}(A) = \rho$.

poiché la def di rango è tale che

$$rk(A) = rk({}^tA).$$

ne segue che

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = rk\,A$$
$$\shortparallel$$
$$\dim \mathcal{C}({}^tA) = rk({}^tA) = rk(A).$$

$\square$

Supponiamo di avere t vettori di $\mathbb{K}^n$ e vogliamo estrarre da essi una seq. libera $\Rightarrow$ base dello spazio che generano.

POSSIAMO
1) Mettere i vettori a matrice. A
2) Determinare un <u>minore fondamentale</u> di A

$=$ minore di ~~rango~~ ordine max che ha $\det \neq 0$

3) estrarre i vettori intercettati da M.

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & & & & & & & & \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\overline{v}_2 \rightarrow & \boxed{2} & \boxed{0} & 2 & \boxed{0} & 2 & 2 & 0 & 2 \\
\overline{v}_3 \rightarrow & \boxed{3} & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & 5 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\
\overline{v}_5 \rightarrow & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & & \overline{w}_4 & & & &
\end{array}
\qquad \in \mathbb{R}^8
$$

$rk(A) \geq 3$

In particolare una base di $\mathcal{R}(A)$ é data dai vettori $(\overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_5)$

Una base di $\mathcal{C}(A)$ é data da $(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_4)$

$\mathcal{R}(A) \leq \mathbb{R}^8$ $\qquad$ $\mathcal{C}(A) \leq \mathbb{R}^5$

Spazi vettoriali
- seq. di gen
- seq. libere e legate
- lemma di Steinitz
- dimensione.
- somma e int.
- formula di Graßmann.
- BASI

Applicazioni lineari:
- teo f.
- Nullità + Rk
- Rappresentazione matriciale

Matrici:
- prodotto righe per colonne
- determinante
- matrice inversa.
- rango → Kronecker
  ↳ orlati