$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

DIM: 1) $\dim U \cap W = 0 \Rightarrow U \oplus W \Rightarrow$ una base di $U \oplus W$ è data dall'unione di una base di U e una di $W \Rightarrow \dim U \oplus W = \dim U + \dim W$.

2) $\dim U \cap W > 0$

Sia $I = U \cap W$ e sia $\mathcal{B}_I = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_i)$ una sua base

$\dim U = \ell$

$\dim W = m$

$$\underbrace{\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_{\ell-i}\ \boxed{\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_i}}_{\mathcal{B}_U} \qquad \overbrace{\overbrace{\boxed{\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_i}}^{\mathcal{B}_I}\ \bar{b}_1 \cdots \bar{b}_{m-i}}^{\mathcal{B}_W}$$

Usiamo il teorema di comp. della base per completare $\mathcal{B}_I$ a base di U e di W aggiungendo $\ell-i$ vettori di U e $m-i$ vettori di W

$\mathcal{B}_U$ base di U
$\mathcal{B}_W$ base di W.

$$\underbrace{\underbrace{\boxed{a_1 \dots a_{l-i}}}_{l-i} \; \underbrace{\boxed{e_1 \dots e_i}}_{i}}_{\mathcal{B}_U} \quad \underbrace{\boxed{b_1 \dots b_{m-i}}}_{m-i}$$

$$\mathcal{B}_W = \boxed{e_1 \dots e_i} \; \boxed{b_1 \dots b_{m-i}}$$

1) ABBIAMO $l-i+i+m-i = l+m-i = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$ vettori.

2) la sequenza di vettori genera $U+W$ perché viene da $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$

→ DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE LA SEQ. È LIBERA

Supponiamo per assurdo che la seq. sia legata $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ esiste c. lin. non banale

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_{\ell-i} \bar{a}_{\ell-i} +$$

$$\beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_i \bar{e}_i +$$

$$\gamma_1 \bar{b}_1 + \gamma_2 \bar{b}_2 + \dots + \gamma_{m-i} \bar{b}_{m-i} = \underline{0}.$$

OSS: NON PUÒ ESSERE ~~$\beta_1 = \beta_2 = \dots$~~

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{m-i} = 0$$

perché altrimenti avremmo una c. lineare a coeff. non tutti $= 0$ di $\mathcal{B}_U$ che dà $\underline{0}$ e

$$\underbrace{\alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_{\ell-i} \bar{a}_{\ell-i} + \beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_i \bar{e}_i}_{\in U} = \underbrace{-(\gamma_1 \bar{b}_1 + \dots + \gamma_{m-i} \bar{b}_{m-i})}_{\in W}$$

$\Rightarrow -\gamma_1 \bar{b}_1 - \dots - \gamma_{m-i} \bar{b}_{m-i} \in U \cap W = \mathcal{L}(\mathcal{B}_I)$

$\Rightarrow \exists\, \delta_1 \dots \delta_i$ tali che $(\delta_1 \dots \delta_i) \neq (0 0 \dots 0)$

e $-\gamma_1 \bar{b}_1 - \dots - \gamma_{m-i} \bar{b}_{m-i} = \delta_1 \bar{e}_1 + \dots + \delta_i \bar{e}_i$

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_{e-i} \bar{a}_{e-i} + \beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_i \bar{e}_i = \delta_1 \bar{e}_1 + \dots + \delta_i \bar{e}_i$$

$$\underbrace{\alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_{e-i} \bar{a}_{e-i} + (\beta_1 - \delta_1)\bar{e}_1 + \dots + (\beta_i - \delta_i)\bar{e}_i}_{\text{c. lineare di } \mathcal{B}_U} = \underline{0}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{e-i} = 0$

$\beta_1 - \delta_1 = 0$

$\vdots$

$\beta_i - \delta_i = 0 \quad \Rightarrow$ in particolare abbiamo nella c. lineare iniziale

$$\underbrace{\alpha_1\overline{a}_1 + \dots + \alpha_{\ell-i}\overline{a}_{\ell-i}}_{=\underline{0}} + \underbrace{\beta_1\overline{e}_1 + \dots + \beta_i\overline{e}_i + \gamma_1\overline{b}_1 + \dots + \gamma_{m-i}\overline{b}_{m-i}}_{\text{c. lineare vettori base } \mathcal{B}_W} = \underline{0}$$

dobbiamo avere $\beta_1 = \dots = \beta_i = 0$

$\gamma_1 = \dots = \gamma_{m-i} = 0$

ASSURDO PERCHÉ AVEVAMO SUPPOSTO ALMENO UNO DEI $\gamma_j \neq 0$ ↯

$\Rightarrow$ la nostra sequenza è libera $\square$

CALCOLO DIMENSIONI

1) prendere seq. di generatori
- libera $\Rightarrow$ OK
- legata $\Rightarrow$ scarti succ.

2) funzione che sia $\neq 0$ se e solo se abbiamo una base di $V_n(\mathbb{K})$. facile da calcolare.

OSS. 1: RAGIONARE SU LINEARE DIP. O INDIP. DI UNA SEQUENZA DI VETTORI DI $V_n(\mathbb{K})$ È EQUIVALENTE A RAGIONARE SULLA DIP./INDIP. DELL'~~UNA~~ SEQ. DELLE COMPONENTI DI TALI VETTORI RISPETTO UNA BASE FISSATA.

$$\Phi_{\mathcal{B}} \quad V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\sum v_i \bar{e}_i = \bar{v} \longrightarrow (v_1 \dots v_n)$$

$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ indip. $\Leftrightarrow$

i vettori

$(1\ 2\ 3\ 0)$

$(1\ 1\ 0\ 1)$

che le rapp. rispetto la base

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

sono indip.

In $\mathbb{R}[x]_{\le 5}$ $\quad x^2+2x+3, \quad x^3-x+1, \quad x+2$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, x^4, x^5)$

$(3\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0)$ $(1\ {-1}\ 0\ 1\ 0\ 0)$

$(2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$

funzione $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

tale che:
- in input prende n vettori colonna di $\mathbb{K}^n$
- in output dà un elemento di $\mathbb{K}$

il risultato è $\neq 0$ $\Leftrightarrow$ gli n vettori sono indip. e quindi base.

1) se uno dei vettori in input è c. lineare dei rimanenti il risultato è 0

2) se in input diamo l'elenco dei vettori della base canonica di $\mathbb{K}^n$ il risultato è $\neq 0$.

3) se ad un vettore in input sostituiamo la somma dello stesso con una c. lineare dei rimanenti: la funzione non cambia.

3 #: se una seg. è libera e applichiamo 3 $\Rightarrow$ essa resta libera e se è legata essa resta legata.

<u>Def</u>: Si dice determinante una funzione

$$\det : \mathbb{K}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{K}$$

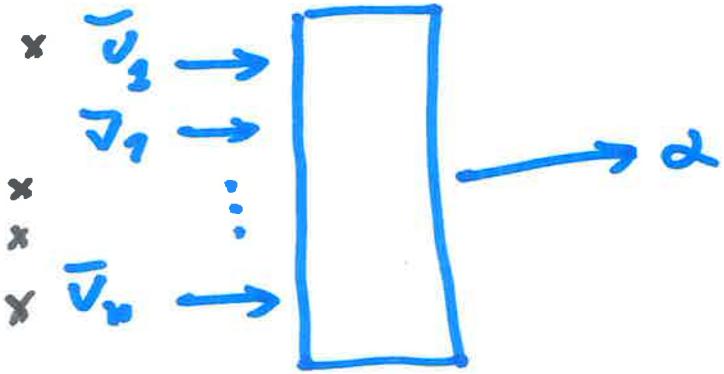
tale che

1) $\det I_n = 1$

2) det è <u>n-multilineare</u> nel senso che se si fissano $(n-1)$-colonne e si lascia variare una di esse come variabile $\Rightarrow$ essa è lineare in quella colonna.

3) det è <u>alternante</u> nel senso che se 2 colonne sono uguali $\Rightarrow \det = 0$

<u>Teorema</u>: $\exists!$ funzione $\det : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$ che soddisfa le proprietà date.



2) dice che se abbiamo una matrice per colonne

$$\det(c_1\ c_2 \dots \alpha c_i + \beta c_i' \dots c_n) =$$

$$= \alpha \det(c_1\ c_2 \dots c_i \dots c_n) + \beta \det(c_1 \dots c_i' \dots c_n)$$

2+3) dice che se scambiamo 2 colonne il segno di det deve cambiare.

$$\det(c_1\, c_2 \dots c_n) =$$

$$= \det(c_1\, c_2 \dots c_n) + 0 =$$

$$= \det(c_1\, c_2 \dots c_n) + \det(c_1\, c_1 \dots c_n) =$$

$$= \det(c_1\, c_2+c_1 \dots c_n) + 0 =$$

$$= \det(+c_1\, c_2+c_1 \dots c_n) + \det(-c_2-c_1\, c_2+c_1 \dots c_n)$$

$$= \det(-c_2\, c_2+c_1 \dots c_n) + 0 =$$

$$= \det(-c_2\, c_2+c_1 \dots c_n) + \det(-c_2\, -c_2 \dots c_n) =$$

$$= \det(-c_2\, c_1 \dots c_n).$$

oss 1) $\det(\alpha c_1 \ c_1) = 0$ perché

$\det(\alpha c_1 \ c_1) = \alpha \det(c_1 \ c_1) = 0$

2) $\det(c_1 \ c_2) = \det(c_1 \ c_2) + \det(c_1 \ c_1) =$

$= \det(c_1 \ c_1 + c_2) = \det(c_1, c_1 + c_2) + 0 =$

$= \det(c_1 \ c_1 + c_2) + \det(-c_1 - c_2 \ \ c_1 + c_2) =$

$= \det(-c_2 \ \ c_1 + c_2) + 0 =$

$= \det(-c_2 \ \ c_1 + c_2) + \det(-c_2 \ -c_2) =$

$= \det(-c_2 \ c_1) = -\det(c_2 \ c_1)$

3) $\det(c_1 + \sum_{i>0} \alpha_i c_i \ \ c_2 \dots c_n) =$

$$= \det(c_1 \dots c_n) + \sum_{i>0} \alpha_i \underbrace{\det(c_i\, c_2 \dots c_n)}_{\substack{=0 \\ \text{2 colonne uguali}}} =$$

$$= \det(c_1 \dots c_n).$$

$$\cancel{\det M = \det(c_1 \dots c_n) =}$$

$$=$$

<u>OSS 1</u>: Se una matrice contiene una colonna di 0 $\Rightarrow$ det $= 0$

$$\det(\underline{0}\ c_2 \dots c_n) = \det(0 \cdot \underline{0}\ c_2 \dots c_n) = 0 \det(\underline{0}\ c_2 \dots c_n).$$

Sia M una matrice quadrata

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se la prima colonna è $\underline{0}$ $\Rightarrow$ det $M = 0$ FINE

~~se la prima colonna non è 0~~

~~se la prima~~

se le colonne di M sono un sistema legato $\Rightarrow$ una di esse è comb. lineare delle rimanenti $\Rightarrow$ $\det M = 0$ perché sottraiamo a detta colonna proprio la c. lineare che la determina.

Supponiamo che le colonne di M siano un sistema libero. $\Rightarrow$ $\exists$ una com. lineare dei vettori colonna che compaiono in M tale che essa dia il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

considerando la prima colonna

e supponiamo tale c. lineare sia

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

se $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow$ possiamo riscrivere

$$\det\left(\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n \quad C_2 \dots C_n\right) =$$

$$= \alpha_1 \det\left(C_1 \quad C_2 \dots C_n\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ 0 & C_2 & \dots & C_n \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$\det M = \alpha_1^{-1} \det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1^{-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & c_2' & c_3' & \cdots & c_n' \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \Big] n-1$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n-1}$$

$\mathbb{K}^{n-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_2 c_2' + \dots + \alpha_n c_n'$$

se $\alpha_2 \neq 0$ procediamo.

e continuiamo fino a che è possibile.

$$\det M = \alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\cdots\alpha_n^{-1}\det(I)$$

oppure ottenere che una colonna è c. lineare delle altre. $\Rightarrow \det M = 0$.

$$\det\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1) scambiare le colonne di modo che la prima colonna compaia con coeff $\neq 0$ nella c. lineare che dà $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$. Se non è possibile $\Rightarrow \det = 0$

ALTRIMENTI RICORDARSI DI CAMBIARE IL SEGNO. $(s=1)$ SE SI È FATTO UNO SCAMBIO $s=0$ ALTRIMENTI

2) Scrivere $\det M = (-1)^s \alpha_1 \det M'$

ove M' = sottomatrice di M ~~ottenuta~~ (con eventuali colonne scambiate) che corrisponde al minore ottenuto cancellando I riga e I colonna.

Es.

$$\det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 4\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 4\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -4\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -4\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\square$

Teorema (I teorema di Laplace)

M matrice $\in \mathbb{K}^{n,n}$

$\Rightarrow \det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \det M_{ij} =$ j fissato

o $= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \det M_{ij}$ i fissato

ove M_{ij} = minore (= sottomatrice) di M ottenuto cancellando i-esima riga e j-esima colonna.

$$\det\begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} k & 1 \\ 2 & k \end{bmatrix} \qquad k^2 - 2$$

ALGORITMO DI GAUSS

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- $s = 0$
- Se $a_{11} = 0 \to$ trovare i con $a_{1i} \neq 0$
  - se non $\exists \to \det A = 0$
  - se esiste: scambiare colonna 1 ed i
    - $s = 1$
- $\forall j > i$: sottrarre alla colonna j $a_{11}^{-1} a_{1j}$ volte la colonna i.
- restituire $\boxed{a_{11} (-1)^s \det A_{11}}$ (ricorsivo)