Applicazione lineare

$$f: V(\mathbb{K}) \longrightarrow W(\mathbb{K})$$

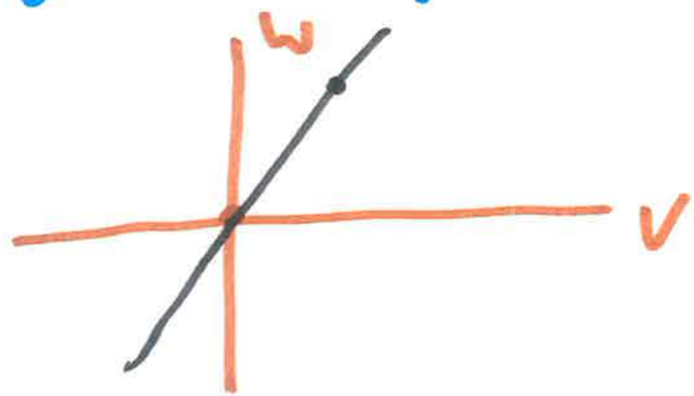
Tale che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V(\mathbb{K})$

$$f(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}).$$

- $\mathrm{Im}(f) \leq W(\mathbb{K})$
- $\ker(f) = \{ \bar{x} \in V \mid f(\bar{x}) = \underline{0} \} \leq V(\mathbb{K}).$

$$\ulcorner \dim V = \dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f \lrcorner$$

f isomorfismo $\iff$ f biiettiva $\iff \begin{cases} \mathrm{Im} f = W \\ \ker f = \{\underline{0}\}. \end{cases}$



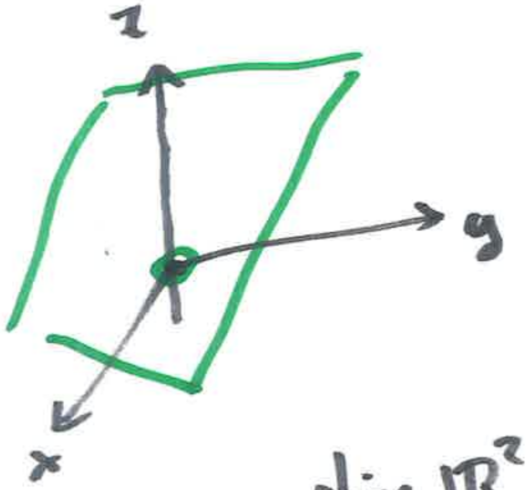
$V, W \leq \mathbb{R}^2$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è lineare $\iff$

$f(x) = \alpha x$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ — $\alpha = 0$ / $\alpha \neq 0$ iniettiva

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f((x,y)) = \alpha x + \beta y$ ~~xxxxx~~ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.



$(\alpha, \beta) = (0,0)$

$\ker f = \mathbb{R}^2$

$(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

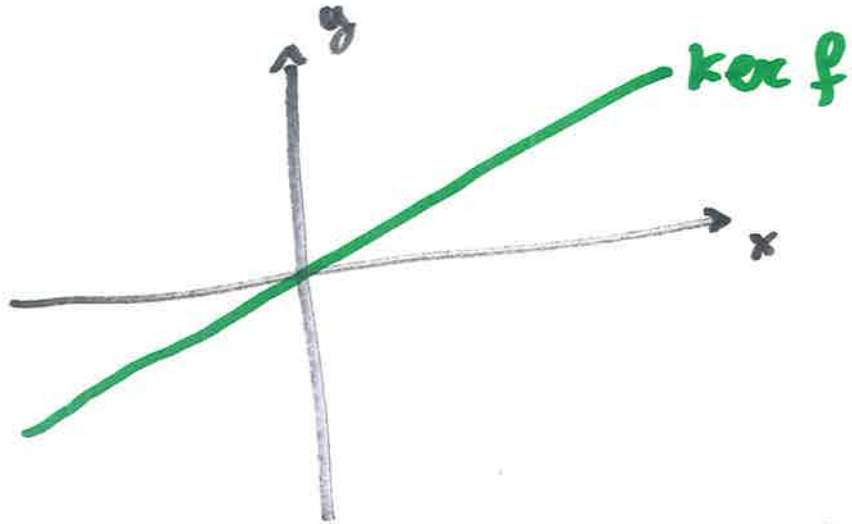
$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

$2 = t + 1$

$t \geq 1$ ma $t \neq 2$ perché altrimenti

$\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2 : f(\bar{x}) = \underline{0} \Rightarrow \dim \ker f = 1$

$\ker f \leq \mathbb{R}^2 \qquad \dim \ker f = 1$



Es. $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to x+y. \end{cases}$ $\ker f = \{(x,y) \mid x+y=0\} = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$

<u>Def</u>: Si dice funzionale lineare su $V(\mathbb{K})$ una funzione $f: V(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ed è lineare.

fondamentalmente i funzionali lineari corrispondono ad eq. di I grado.

__Teorema__: Siano $V(\mathbb{K})$, $W(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali e
$L(V;W) := \{ f : V(\mathbb{K}) \to W(\mathbb{K}) \text{ lineari} \}$.

ALLORA $L(V;W)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Se $\dim V = n^{<\infty}$, $\dim W = m^{<\infty} \Rightarrow \dim L(V;W) = m \cdot n$.

__DIM__: Si verifica che $\underline{0} \in L(V;W)$ ove

$$\underline{0} = \begin{cases} V \to W \\ \bar{x} \to \underline{0}_W \end{cases}$$

Siano $f : V \to W$, $g : V \to W$ lineari $\Rightarrow$

$$(f+g) : \begin{cases} V \to W \\ \bar{x} \to f(\bar{x}) + g(\bar{x}) \end{cases} \quad \text{é lineare.}$$

$$(\alpha \cdot f) : \begin{cases} V \to W \\ \bar{x} \to \alpha f(x) \end{cases} \quad \text{é lineare.}$$

$$(f+g)(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}) = f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}) + g(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}) =$$
$$= \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) + \alpha g(\bar{x}) + \beta g(\bar{y}) =$$
$$= (\alpha f(\bar{x}) + \alpha g(\bar{x})) + \beta(f(\bar{y}) + g(\bar{y})) =$$
$$= \alpha \cdot (f+g)(\bar{x}) + \beta \cdot (f+g)(\bar{y}) \qquad \square$$

<u>OSS:</u> Sia $f: V \to W$ lineare e sia $\mathcal{B}$ una base di V.

$\Rightarrow$ La funzione f dipende solamente dai valori che essa assume su $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ base di V

$\bar{v} \in V \Rightarrow \bar{v} = \alpha_1\bar{e}_1 + \dots + \alpha_n\bar{e}_n \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{v}) = f(\alpha_1\bar{e}_1 + \dots + \alpha_n\bar{e}_n) = \alpha_1 \underline{f(\bar{e}_1)} + \dots + \alpha_n \underline{f(\bar{e}_n)}$

$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \ldots \bar{e}_m')$ una base di W.

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} f(\bar{e}_1) &= a_{11}\bar{e}_1' + a_{21}\bar{e}_2' + \ldots + a_{m1}\bar{e}_m' \\ f(\bar{e}_2) &= a_{12}\bar{e}_1' + a_{22}\bar{e}_2' + \ldots + a_{m2}e_m' \\ &\vdots \\ f(\bar{e}_n) &= a_{1n}\bar{e}_1' + a_{2n}\bar{e}_2' + \ldots + a_{mn}\bar{e}_m' \end{aligned}\right\} \to \text{per colonne}$$

Fissate dunque $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \ldots \bar{e}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \ldots \bar{e}_m')$ basi risp. di V e di W la funzione f è univocamente determinata dalla tabella di valori (=matrice)

$$A_f := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

In particolare, fissate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ si determina un isomorfismo di spazi vettoriali fra

$$L(V;W) \cong \mathbb{K}^{m,n}$$

Supponiamo ora $\bar{v} \in V(\mathbb{K})$ $\cancel{\text{in } = (v_1 \dots v_n)}$

$$\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + \dots + v_n\bar{e}_n$$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) = v_1 f(\bar{e}_1) + \dots v_n f(\bar{e}_n) =$$

$$= v_1(a_{11}\bar{e}'_1 + \dots a_{m1}e'_m) +$$
$$v_2(a_{12}\bar{e}'_1 + \dots a_{m2}e'_m) +$$
$$\vdots$$
$$v_n(a_{1n}e'_1 + \dots a_{mn}e'_m) =$$

$$= (v_1 a_{11} + v_2 a_{12} + \dots + v_m a_{1n}) \bar{e}_1' +$$

$$(v_1 a_{21} + v_2 a_{22} + \dots + v_n a_{2n}) \bar{e}_2' +$$

$$\vdots$$

$$(v_1 a_{m1} + v_2 a_{m2} + \dots v_n a_{mn}) e_m' =$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{e}_1' & \bar{e}_2' & \dots & \bar{e}_m' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 a_{11} + v_2 a_{12} + \dots + v_n a_{1n} \\ \vdots \\ v_1 a_{m1} + v_2 a_{m2} + \dots v_n a_{mn} \end{bmatrix} =$$

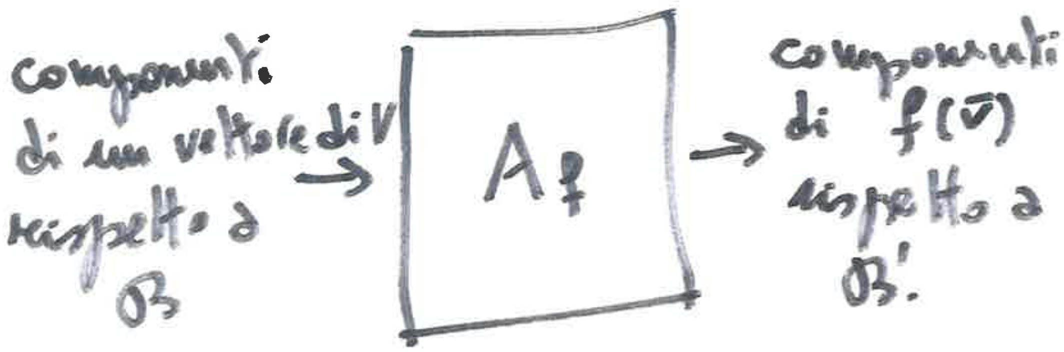
$$= \begin{bmatrix} \bar{e}_1' & \bar{e}_2' & \dots & e_m' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

le componenti rispetto $\mathcal{B}'$] dell'immagine con f

del vettore di componenti $(v_1 \dots v_n)$ rispetto a $\mathcal{B}$

sono $$y = A_f \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{y}_{\text{vettore colonna rispetto } \mathcal{B}'} = A_f \underbrace{X}_{\text{vettore colonna rispetto a } \mathcal{B}.}$$



Se $f: \mathbb{K} \to \mathbb{K} \Rightarrow f(x) = \alpha x$ lineare

se $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \Rightarrow f(\bar{x}) = A\bar{X}$ lineare

OSSERVAZIONI

1) $\dim \mathbb{K}^{m,n} = \dim L(V;W) = m \cdot n$

una base di $\mathbb{K}^{m,n}$ é data dalle matrici

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right)$$

MATRICI con esattamente una entrata $= 1$

2) Se $\dim V = n < \infty \Rightarrow \dim \mathcal{L}(V;\mathbb{K}) = n$

cioè se la dim V è finita la dimensione dello sp. vettoriale dei funzionali su V è la stessa $\Rightarrow$

$V \cong \mathcal{L}(V;\mathbb{K})$.

$\mathcal{L}(V;\mathbb{K}) =: V^*$ è detto sp. vettoriale duale di V

Se $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ è una base di $V \Rightarrow \mathcal{B}^* = (\bar{e}^1 \dots \bar{e}^n)$ è detta base duale di $\mathcal{B}$ se e^i lineare.

$$e^i : \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{K} \\ e_j \longrightarrow \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$ base canonica $(1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1)$.

$\bar{e}^1(\bar{e}_1) = 1$ $\quad (1\,0\,0)$

$\bar{e}^1_1(\bar{e}_2) = 0$

$\bar{e}^1(\bar{e}_3) = 0$

$$\bar{e}^1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1\,0\,0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x$$

$\bar{e}^2(\bar{e}_1) = 0$ $\quad (0\,1\,0)$ $\quad \bar{e}^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y$

$\bar{e}^2(\bar{e}_2) = 1$

$\bar{e}^2(\bar{e}_3) = 0$

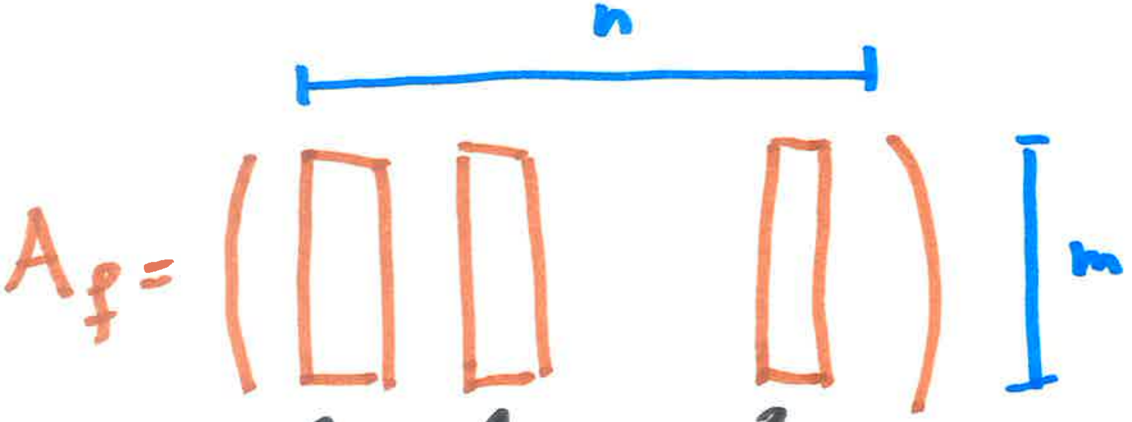
$\bar{e}^3(\bar{e}_1) = 0$ $\quad \bar{e}^3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z.$

$\bar{e}^3(\bar{e}_2) = 0$

$\bar{e}^3(\bar{e}_3) = 1$

$f: V \to W$ $\qquad$ $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ base di V

$\qquad\qquad\qquad$ $\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_m)$ base di W



componenti rispetto $\mathcal{B}'$ delle ~~i~~mmagini dei vettori di $\mathcal{B}$.

vettore che rappresenta $\bar{e}_i$

$$A_f \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \text{i-esima colonna di } A_f$$

BASE

Siano $f : V \to W$ $\qquad \mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ di V

$g : W \to \mathcal{U}$ $\qquad \mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_m)$ di W

$g \circ f : V \to \mathcal{U}$ $\qquad \mathcal{B}'' = (\bar{e}'''_1 \dots \bar{e}'''_k)$ di $\mathcal{U}$

chiamo A = matrice di f rispetto $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$

e B = matrice di g rispetto $\mathcal{B}', \mathcal{B}''$

qual è la matrice di $(g \circ f)$ rispetto $\mathcal{B}, \mathcal{B}''$??

risposta: $\underline{BA}$

$\dim V = n$, $\dim W = m$ $\dim \mathcal{U} = k$

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $\qquad B \in \mathbb{K}^{k,m}$ $\qquad \to BA \in \mathbb{K}^{k,n}$

X vettore di V in comp. rispetto a $\mathcal{B}$ $\xmapsto{A}$ AX vettore di W in componenti rispetto a $\mathcal{B}'$ e corrispondente a $f(X)$

$$AX = X' \xmapsto{B} BX' = B(AX) = (BA)X$$

vettore di U in componenti rispetto a $\mathcal{B}''$ corrispondente a $g(X') = g(f(X)) = (g \circ f)(X)$

COME CAMBIANO LE MATRICI DI f AL CAMBIARE DELLE BASI

$f: V \to W$

A_f dipende dalle basi di V e W.

Se cambiamo basi, la matrice cambia ma alcune proprietà restano invariate.

C

$\tilde{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ cambio base

$X \to \boxed{A_f} \to Y$

rispetto a $\mathcal{B}$ | rispetto a $\mathcal{B}'$.

C'

cambio base $\mathcal{B}' \to \tilde{\mathcal{B}}$

X' coord. rispetto a $\tilde{\mathcal{B}}$

Y' coord rispetto a $\tilde{\mathcal{B}}'$

A_f

$\downarrow$

$C A_f C'$

Supponiamo $f: V \to V$ e $\mathcal{B}$ base di V

$\mathcal{B}'$ base di V

e supponiamo

$$X = MX'$$

ove M matrice che det. il camb. di base,

X coord. risp. a $\mathcal{B}$

X' coord. risp. a $\mathcal{B}'$

$$\begin{tikzcd}
MX' = X \arrow[r] & \boxed{A_f} \arrow[r] & y \arrow[d, "M^{-1}"] \\
X' \arrow[u, "M"] & & y'
\end{tikzcd}$$

1 X' coord. rispetto $\mathcal{B}'$

2

3 y' coord. rispetto a $\mathcal{B}'$

$$y' = M^{-1}y = M^{-1}A_f X = \underbrace{M^{-1}A_f M}_{} X'$$

OSS: $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathcal{L}(f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n)) =$

$= \dim \mathcal{L}(c_1 \dots c_n)$ colonne della matrice A_f

perché in componenti i vettori di $\operatorname{Im}(f)$ sono c. lineari delle colonne di A_f.

In generale sappiamo che ~~[illegible]~~ la $\dim V(\mathbb{K})$ è la cardinalità di ogni sua base.

OSS: Se $W \subseteq V(\mathbb{K}) \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\dim W \leq \dim V(\mathbb{K})$

In particolare se $W \subseteq V(\mathbb{K})$ e $\dim W = \dim V(\mathbb{K})$ con $V(\mathbb{K})$ finitamente generato $\Rightarrow W = V(\mathbb{K})$.

IPOTESI : $\dim V \leq \infty$

Se $W \leq V(\mathbb{K})$ e $\dim W > \dim V(\mathbb{K})$ esisterebbe una seq. di $\dim V(\mathbb{K}) + 1$ vettori in W lin. indip ma sarebbero indip. anche in V $\Rightarrow$ ↯ per STEINITZ CHE dice che non ci possono essere più vettori indip. che in una seq. libera = base.

Se $\dim W = \dim V \Rightarrow$ una base di W ha tutti vettori quanti una base di $V \Rightarrow$ necessariamente sono generatori per V (per STEINITZ) $\Rightarrow W = V$ $\square$

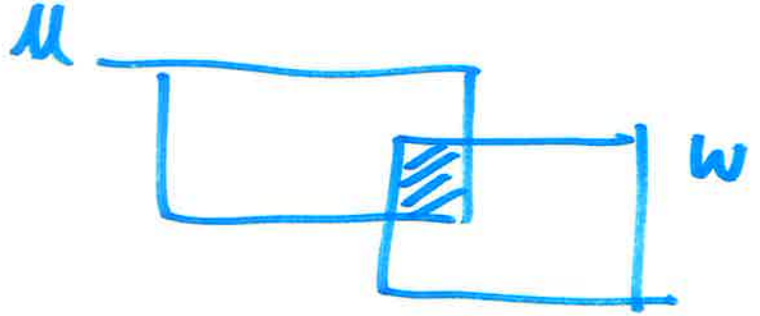
OSS 2: Sia $0 \leq i \leq \dim V(\mathbb{K})$. ALLORA $V(\mathbb{K})$ contiene almeno un sottospazio di $\dim = i$

DIM: Se $i = 0 \Rightarrow W = \{\underline{0}\}$.

se $i > 0$, sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V(\mathbb{K})$ e prendiamo $W = \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$. #

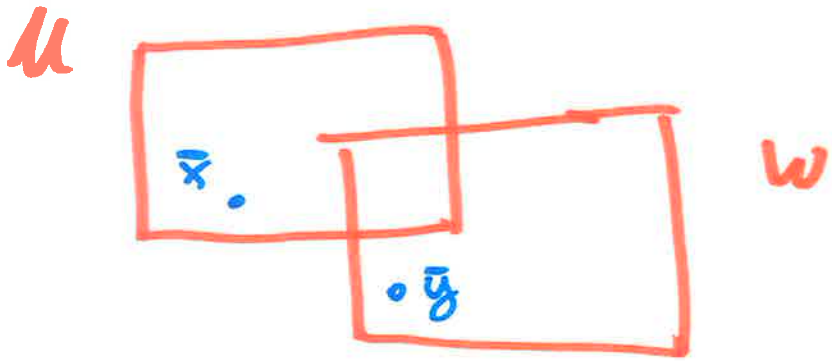
In generale se $U, W \leq V(\mathbb{K}) \Rightarrow$

$$0 \leq \dim U \cap W \leq \min(\dim U, \dim W).$$



OSS: $U \cup W$ non è in generale un sottospazio vettoriale.

Teorema $U \cup W \leq V(\mathbb{K}) \iff U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$



<u>DIM</u> Supponiamo $\exists\, \bar{x}, \bar{y}$ con $\bar{x} \in U \setminus W$
$\bar{y} \in W \setminus U$

$\Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \notin U \cup W$

infatti se $\bar{x} + \bar{y} \in U \cup W \Rightarrow$

$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} \in U \Rightarrow \bar{z} - \bar{x} \in U \Rightarrow \bar{y} \in U$ ↯

oppure

$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} \in W \Rightarrow \bar{z} - \bar{y} \in W \Rightarrow \bar{x} \in W$ ↯.

quindi $U \cup W \not\leq V$.

se $\mathcal{U} \subseteq W \Rightarrow \mathcal{U} \cup W = W \leq V$

$W \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \cup W = \mathcal{U} \leq V$ $\square$

Intersecare sottospazi $\longrightarrow$ produce sottospazi.

Unire sottospazi $\longrightarrow$ non dà in generale sottospazi.

<u>Def</u>: Siano $\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$ definiamo

$$\mathcal{U} + W := \{\bar{u} + \bar{w} \in V \mid \bar{u} \in \mathcal{U}, \bar{w} \in W\}.$$

<u>SOMMA</u> DI $\mathcal{U}$ e W.

<u>Teorema</u>: $\mathcal{U}+W \leq V(\mathbb{K})$ ed inoltre per ogni $Z \leq V$ tale che $\mathcal{U} \cup W \subseteq Z$ si ha $\mathcal{U}+W \leq Z$.

($\mathcal{U}+W = \mathcal{L}(\mathcal{U} \cup W)$ è il più piccolo sott. di V che contiene $\mathcal{U} \cup W$).

In particolare se $\mathcal{B}_U$ base di U e
$\mathcal{B}_W$ base di W
allora $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ sistema di generatori per $U+W$.

DIM: Se $\begin{array}{l} \bar{x} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1 \\ \bar{y} = \bar{u}_2 + \bar{w}_2 \end{array} \in U+W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = \alpha\bar{u}_1 + \alpha\bar{w}_1 + \beta\bar{u}_2 + \beta\bar{w}_2 =$$

$$= \underbrace{(\alpha\bar{u}_1 + \beta\bar{u}_2)}_{\in U} + \underbrace{(\alpha\bar{w}_1 + \beta\bar{w}_2)}_{\in W} =$$

$$= \bar{u}_3 + \bar{w}_3 \in U+W$$

$U+W \leq V$

inoltre se Z sottospazio di V tale che $U \cup W \subseteq Z \Rightarrow \bar{u} + \bar{w} \in Z \ \forall \bar{u} \in U, \bar{w} \in W \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{U}+W \leq Z. \Rightarrow \mathcal{U}+W = \mathcal{L}(\mathcal{U} \cup W).$

Sia $\mathcal{B}_\mathcal{U}$ una base di $\mathcal{U}$

$\mathcal{B}_W$ una base di W

$\Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{L}(\mathcal{B}_\mathcal{U}) \quad W = \mathcal{L}(\mathcal{B}_W)$

$\forall \bar{u} \in \mathcal{U}$ è c. lineare di vettori di $\mathcal{B}_\mathcal{U}$

$\forall \bar{w} \in W$ è c. lineare di vettori di $\mathcal{B}_W$

$\forall \bar{u}+\bar{w} \in \mathcal{U}+W$ è c. lineare di vettori di $\mathcal{B}_\mathcal{U} \cup \mathcal{B}_W$ $\square$

$$\max(\dim \mathcal{U}, \dim W) \leq \dim \mathcal{U}+W \leq \dim V.$$

$$0 \leq \dim \mathcal{U} \cap W \leq \min(\dim \mathcal{U}, \dim W)$$

$$\dim \mathcal{U}+W \leq \dim \mathcal{U} + \dim W$$

$U = \mathcal{L}((0100), (1100))$ $\quad \dim U = 2$

$W = \mathcal{L}((0100), (0010))$ $\quad \dim W = 2$

$\dim U + W = 3 < 2+2$

$U = \mathcal{L}((1000), (0100))$ $\quad B_U \cup B_W$ è base di $U+W$

$W = \mathcal{L}((0010), (0001))$

$\dim U + W = 4 = 2+2$

$U = \mathcal{L}((1000), (0100))$

$W = \mathcal{L}((1000))$

$\dim U + W = 2$

<u>Def</u>: $\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$. Si dice che la <u>somma</u> $\mathcal{U}+W$ è <u>diretta</u> e si scrive

$$\mathcal{U} \oplus W$$

se ogni vettore di $\mathcal{U}+W$ si scrive in modo unico come somma di un vettore di $\mathcal{U}$ e di un vettore di W.

[$\mathcal{U} \oplus W \iff \forall \bar{v} \in \mathcal{U}+W \ \exists! (\bar{u}, \bar{w}) \in \mathcal{U} \times W$ con $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$.]

(esercizio: dim che $\mathcal{U} \oplus W \cong \mathcal{U} \times W$ con somma e prod "vettore per vettore").

<u>oss</u>: Se la somma $\mathcal{U} \oplus W$ è diretta $\Rightarrow$ l'unione di una base di $\mathcal{U}$ con una base di W è base di $\mathcal{U}+W$.

<u>Dim</u>: $\underline{0} \in \mathcal{U} \oplus W$ si scrive in modo unico come $\underline{0} = \underset{\in \mathcal{U}}{\underline{0}} + \underset{\in W}{\underline{0}}$

ma $\underline{0}$ in U si scrive solo come c.lin a coeff. tutti 0 di vettori di $\mathcal{B}_U$

$\underline{0}$ in W si scrive solo come c.lineare a coeff. tutti 0 di $\mathcal{B}_W$.

$\Rightarrow$ l'unica c. lineare che dà $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$ di vettori di $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è quella a coeff. tutti nulli. $\square$

Teorema: $U \oplus W \iff U \cap W = \{\underline{0}\}$

DIM: Supponiamo $U \oplus W$ e sia $\bar{x} \in U \cap W$.

Sia ora $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \in U \oplus W$

se fosse $\bar{x} \neq \underline{0} \Rightarrow \bar{v} = \bar{v} + \bar{x} - \bar{x} =$

$= (\bar{u} + \bar{x}) + (\bar{w} - \bar{x})$

ma $\bar{u} + \bar{x} \in U$ e $\bar{w} - \bar{x} \in W \Rightarrow$ deve essere

$\bar{u} = \bar{u} + \bar{x}$ e $\bar{w} = \bar{w} - \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \underline{0}$ ↯ $\Rightarrow U \cap W = \{\underline{0}\}$.

Viceversa: supponiamo

$U \cap W = \{\underline{0}\}$ e dimostriamo che $U \oplus W$.

Siano $\bar{v} \in U+W$ tale che

$$\bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1 = \bar{u}_2 + \bar{w}_2 \Rightarrow$$

$$\underline{0} = \bar{v} - \bar{v} = \bar{u}_1 - \bar{u}_2 + \bar{w}_1 - \bar{w}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}_{\in U} = \underbrace{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}_{\in W} \Rightarrow$$

$$\bar{u}_1 - \bar{u}_2, \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \in U \cap W = \{\underline{0}\}.$$

$$\Rightarrow \bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \underline{0} = \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{u}_1 = \bar{u}_2 \\ \bar{w}_1 = \bar{w}_2 \end{cases}.$$

$\Rightarrow U \oplus W$ $\square$

oss: Siano $B_U \cup B_W$ una sequenza libera (e dunque base di $U+W$) $\Rightarrow$ ogni vettore di $U+W$ si scrive in comp. in modo unico come c. lineare di vettori di B_U e di vettori di $\mathcal{B}_W$ $\Rightarrow$ in particolare si scrive in modo unico come somma di una c.lineare di vettori di $\mathcal{B}_U$ con una c.lineare di vettori di $\mathcal{B}_W$ $\Rightarrow U \oplus W$ $\square$

$X, Y \leq V$

<u>OSS</u>: Supponiamo $X \oplus Y \Rightarrow$

- $\dim(X \oplus Y) = \dim X + \dim Y$,

In particolare se $\dim(X) + \dim(Y) > \dim V \Rightarrow$ la somma di X e Y non può essere diretta.

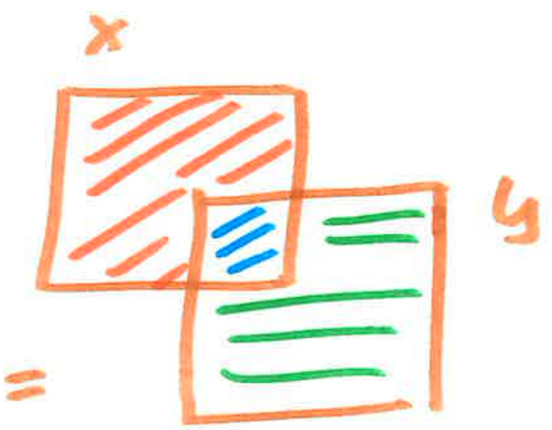
$$\dim(X \oplus Y) = \dim X + \dim Y - 0 =$$
$$= \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y).$$

Formula di Graßmann:

$$\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y)$$

principio di inclusione/esclusione.

X, Y insiemi.



$$|X \cup Y| = |X \setminus Y| + |Y \setminus X| + |X \cap Y| =$$

$$= |X| - |X \cap Y| + |Y| - |X \cap Y| + |X \cap Y| =$$

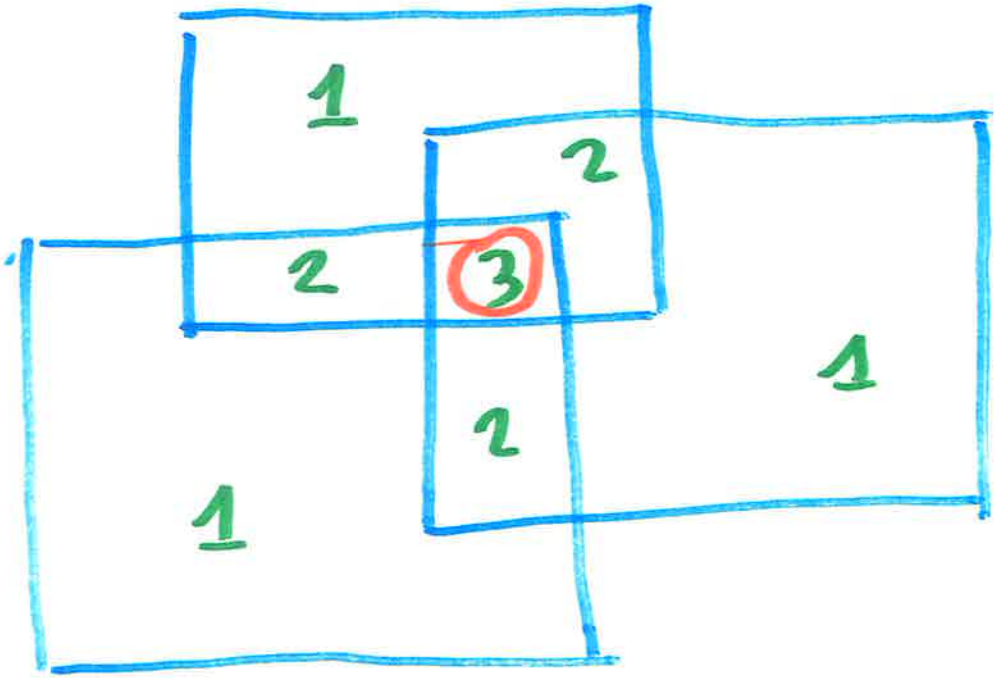
$$|X| + |Y| - |X \cap Y|$$

$$|X \setminus Y| = |X| - |X \cap Y|$$

$$|Y \setminus X| = |Y| - |X \cap Y|$$

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$



$$|\bigcup X_i| = \sum |X_i| - \sum |X_i \cap X_j| + \sum |X_i \cap X_j \cap X_k|$$

$$\ldots + (-1)^{t+1} \ldots$$