BASE $V_n(\mathbb{K})$ $\rightarrow$ seq. libera di generatori

$\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$ ha componenti univocamente determinate rispetto una base

CAMBIAMENTO DI BASE

$$E = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix} \qquad E' = \begin{pmatrix} \bar{e}_1' \\ \vdots \\ \bar{e}_n' \end{pmatrix}$$

$\bar{v}$ vettore di componenti $(x_1 \dots x_n)$ risp. E

$(x_1' \dots x_n')$ risp E'

Legame fra $(x_1 \dots x_n)$ e $(x_1' \dots x_n')$.

SCRIVO GLI ELEMENTI DI E' in termini DI ELEMENTI DI E

$$E' = A E$$

ove A è una matrice quadrata $n \times n$ le cui righe sono le componenti dei vettori di E' rispetto E.

$$\bar{v} = (x'_1 \, x'_2 \dots x'_n) \, E' \qquad v = (x_1 \, x_2 \dots x_n) \, E$$

$$(x'_1 \dots x'_n) \, E' = (x_1 \, x_2 \dots x_n) \, E$$

$$\|$$

$$(x'_1 \dots x'_n) A E = (x_1 \, x_2 \dots x_n) \, E$$

DEDUCIAMO CHE $(x_1' \dots x_n')A = (x_1 \dots x_n)$

perché sono le stesse componenti del medesimo vettore rispetto la base $\bar{E}$ (e queste componenti sono uniche).

$${}^{T}\!A \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

matrice di cambiamento di base da $\bar{E}'$ ad $\bar{E}$

prodotto righe per colonne:

DATO un vettore $(v_1 \dots v_n) \in \mathbb{K}^{1,n}$

ED UN VETTORE $\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n,1}$

$$(v_1 \dots v_n)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n$$

<u>N.B</u> Definiamo il prodotto di 2 matrici

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{K}^{n,s}$

come la matrice $C \in \mathbb{K}^{m,s}$ tale che

$$c_{ij} = (a_{i1} \dots a_{in})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

se B ha un numero di righe diverso dal numero di colonne di A il prodotto non si può fare!!

<u>OSS</u>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^{n,1}} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^{1,n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_1v_1 & w_1v_2 & \cdots & w_1v_n \\ \vdots & & & \\ w_nv_1 & w_nv_2 & \cdots & w_nv_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^{n,n}}$$

$$\neq \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n$$

- IL PRODOTTO RIGHE PER COLONNE NON É COMMUTATIVO.
- IL PRODOTTO RIGHE PER COLONNE È UNA OPERAZIONE INTERNA IN $\mathbb{K}^{n,n}$ (matrici quadrate) È

1) Ammette elemento neutro $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

matrice identica di ordine n

2) È ASSOCIATIVO

3) NON È DETTO CHE OGNI MATRICE AMMETTA INVERSA.

Indichiamo con $GL(n, \mathbb{K})$ l'insieme di tutte le matrici di $\mathbb{K}^{n,n}$ che ammettono inversa.

$I \in GL(n, \mathbb{K})$

OSS: $GL(n, \mathbb{K})$ è un gruppo e si chiama

<u>GRUPPO GENERALE LINEARE</u>

<u>oss</u>: Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno s. vettoriale finitamente generato $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ sue basi, A matrice di cambiamento di base da $\mathcal{E}$ ad $\mathcal{E}'$.

ALLORA $A \in GL(n, \mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}^{n,n}$

$$E' = A \cdot E$$

scambiando i ruoli

$$E = A' E'$$

$$E = A' E' = A'(A E) = (A'A) E$$

$A'A$ é la matrice che ci dà le componenti dei vettori di E rispetto la base E.

$\Rightarrow A'A = I$

MORFISMI DI SPAZI VETTORIALI

(= Applicazioni lineari).

Siano $V(\mathbb{K})$ e $W(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

Vogliamo studiare le funzioni da $V \to W$

che preservano la struttura di spazio vettoriale.

Vogliamo che $\forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V \quad f(\bar{v}_1 +_V \bar{v}_2) = f(\bar{v}_1) +_W f(\bar{v}_2)$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \bar{v} \in V : f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{op. in } V}}{\alpha \bar{v}}) = \underbrace{\alpha \cdot_W f(\bar{v})}_{\substack{\uparrow \\ \text{op. in } W}}.$$

Def: $f: V \to W$ è detta applicazione/funzione lineare se f manda c. lineari di vettori di V in c. lineari di vettori di W.

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}: f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

- cosa è $Im(f)$? (e quando f suriettiva)
- quando f è iniettiva?
- come fare a descrivere f.

<u>Def</u>: f lineare $V \to W$ è detta <u>isomorfismo</u> se essa è biiettiva e quindi invertibile

[oss: se f invertibile e lineare $\Rightarrow f^{-1}$ lineare]

Lemma: $\mathrm{Im}(f)$ é un sottospazio vettoriale di W

<u>DIM</u>: Siano $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow \exists\, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$ tali che $\bar{w}_1 = f(\bar{v}_1)$ e $\bar{w}_2 = f(\bar{v}_2)$.

In particolare $f(\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2) = \alpha f(\bar{v}_1) + \beta f(\bar{v}_2) = \alpha \bar{w}_1 + \beta \bar{w}_2$ appartiene ad $\mathrm{Im}(f)$ $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(f) \leq W$. $\square$

Def: $f: V \to W$ lineare. Si dice $\ker f := \{\bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \underline{0}\}$.

$\ker$ = kernel (NUCLEO).

Teorema: $\ker(f) \leq V$ e f iniettiva $\Leftrightarrow \ker f = \{\underline{0}\}$.

<u>DIM:</u> • Siano $\bar{u}, \bar{v} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\bar{u}) = \underline{0}$

$f(\bar{v}) = \underline{0}$

$\Rightarrow f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v}) = \alpha \underline{0} + \beta \underline{0} = \underline{0}$

$\Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in \operatorname{Ker} f \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$

• $\Leftarrow$ Se $\operatorname{Ker} f \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow \exists\, \bar{a}, \bar{b} \in \operatorname{Ker} f$ con $\bar{a} \neq \bar{b}$

e $f(\bar{a}) = f(\bar{b}) = \underline{0} \Rightarrow f$ non é iniettiva.

• $\Rightarrow$ Supponiamo $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$ e che sia

$f(\bar{a}) = f(\bar{b}) = \bar{w} \Rightarrow$

$f(\bar{a}) - f(\bar{b}) = \bar{w} - \bar{w} = \underline{0}$ ma $f(\bar{a}) - f(\bar{b}) = f(\bar{a} - \bar{b})$

$\Rightarrow \bar{a} - \bar{b} \in \operatorname{Ker} f$

$\Rightarrow \bar{a} - \bar{b} = \underline{0} \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$. $\square$

$f: V \to W$

OSS: In generale $\dim \operatorname{Im}(f) \leq \dim V$

si chiama <u>rango</u> di f la $\dim \operatorname{Im}(f)$

$$rk(f) := \dim \operatorname{Im}(f) \leq \min(\dim V, \dim W)$$

si chiama <u>nullità</u> di f $\dim \operatorname{Ker}(f)$

$$null(f) := \dim \operatorname{Ker}(f)$$

Teorema (nullità più rango)

$$\dim V = null(f) + rk(f)$$

Lemma: Sia $\mathcal{B}$ una sequenza di generatori di $V(\mathbb{K})$

$f : V \to W$ lineare; allora

$\mathcal{B} = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$

$f(\mathcal{B}) = (f(\bar{b}_1) \dots f(\bar{b}_n))$

è una sequenza di generatori di $W(\mathbb{K})$.

DIM: $\operatorname{Im} f = \{ f(\bar{v}) : \bar{v} = a_1\bar{b}_1 + \dots + a_n\bar{b}_n \in V \} =$

$= \{ f(a_1\bar{b}_1 + \dots + a_n\bar{b}_n) \mid a_i \in \mathbb{K}, b_i \in \mathcal{B} \} =$

$= \{ a_1 f(\bar{b}_1) + \dots + a_n f(\bar{b}_n) \mid a_i \in \mathbb{K}, b_i \in \mathcal{B} \}.$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f$ è generata da $f(\mathcal{B})$ $\square$

N.B. $\mathcal{B}$ libera non implica $f(\mathcal{B})$ libera!!

Lemma 2: $f: V \to W$ lineare.

f manda una base di V in una base di $\mathrm{Im}(f) \iff \ker f = \{\underline{0}\}$.

[f manda seq. libere di generatori di V in seq. libere di generatori di $\mathrm{Im} f$ $\iff \ker f = \{\underline{0}\}$.]

__DIM:__ Se $\ker f \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow \exists\, \bar{v} \neq \underline{0}$ con $\bar{v} \in \ker f$

$\Rightarrow$ chiamata $\mathcal{B}$ base di V $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

abbiamo possiamo completare il solo vettore $\bar{v} \neq \underline{0}$ a base $\mathcal{B}' = (\bar{v}, \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n)$ di V

e vediamo che questa seq. è mandata

in una seq. $(f(\bar{v}), f(\bar{e}_2) \dots f(\bar{e}_n)) =$

$= (\underline{0}, f(\bar{e}_2) \dots f(\bar{e}_n))$ che

è legata e dunque non può

essere base.

Viceversa: supponiamo $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ libera

e $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$.

se fosse $(f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n))$ legata

$\Rightarrow \exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n$ tali che $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0 0 \dots 0)$

e $\alpha_1 f(\bar{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\bar{e}_n) = \underline{0} \Rightarrow$

$f(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n) = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \underline{0}$

ASSURDO PERCHÉ $\mathcal{B}$ libera ↯

Se $\ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow$ una sequenza libera di vettori di $V(\mathbb{K})$ è mandata in una seq. libera di vettori di W.

DIMOSTRAZIONE DI NULLITÁ + RANGO.

$$\dim V = \cancel{\dim}\ \operatorname{rk}(f) + \operatorname{null}(f) =$$

$$= \dim \operatorname{Im}(f) + \dim \operatorname{Ker}(f).$$

1) Se $\operatorname{Ker}(f) = \{\underline{0}\} \Rightarrow$ una base di V é mandata in una base di $\operatorname{Im} f \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim V = \dim \operatorname{Im} f \quad \square$$

1) Supponiamo $\ker f \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow$ esiste una base ~~[illegible]~~ $(\bar{f}_1 \dots \bar{f}_t)$ di $\ker f$ con $t = null(f)$.

Completiamo la base $(\bar{f}_1 \dots \bar{f}_t)$ a base di $V(\mathbb{K})$ prendendo vettori $\bar{g}_1 \dots \bar{g}_{n-t}$ da una sua qualsiasi base.

$t = \dim \ker f$

$n = \dim V$

DOBBIAMO FAR VEDERE CHE $IM(f)$ ha dimensione $n-t = \dim V - null(f)$.

→ FACCIAMO VEDERE

a) $Im f = \langle f(\bar{g}_1) \dots f(\bar{g}_{n-t}) \rangle$

b) $(f(\bar{g}_1) \dots f(\bar{g}_{n-t}))$ è libera.

a) $Im(f) = \langle f(\bar{f}_1), f(\bar{f}_2) \dots f(\bar{f}_t), f(\bar{g}_1) \dots f(\bar{g}_{n-t}) \rangle$

è generato dalle imm. dei vettori
di una base di V.

$= \langle \underline{o}, \underline{o}, \dots \underline{o}, f(\bar{g}_1) \dots f(\bar{g}_{n-t}) \rangle =$

$= \langle f(\bar{g}_1) \dots f(\bar{g}_{n-t}) \rangle$

$\dim Im(f) \leq n-t$

b) Supponiamo per assurdo $f(\bar{g}_1) \dots f(\bar{g}_{n-t})$
legati $\Rightarrow \exists \; \alpha_j : \quad \alpha_1 f(\bar{g}_1) + \dots + \alpha_{n-t} f(\bar{g}_{n-t}) = \underline{o}$
$\alpha_i \neq 0$

$$f(\alpha_1\bar{g}_1+\dots+\alpha_{n-t}\bar{g}_{n-t})=\underline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1\bar{g}_1+\dots+\alpha_{n-t}\bar{g}_{n-t}\in \mathrm{Ker}(f)$$

e $(\alpha_1 \dots \alpha_{n-t}) \neq (0\,0 \dots 0)$.

N.B. $\mathrm{Ker}(f)$ ha per base $(\bar{f}_1 \dots \bar{f}_t)$

$$\Rightarrow \alpha_1\bar{g}_1+\dots+\alpha_{n-t}\bar{g}_{n-t}=\beta_1\bar{f}_1+\dots+\beta_t\bar{f}_t$$

con $\alpha_i \neq 0$

$$-\beta_1\bar{f}_1-\beta_2\bar{f}_2-\dots-\beta_t\bar{f}_t+\alpha_1\bar{g}_1+\dots+\alpha_{n-t}\bar{g}_{n-t}=\underline{0}$$

$\alpha_i \neq 0$

$\Rightarrow$ ASSURDO PERCHÉ $(\bar{f}_1 \dots \bar{f}_t\, \bar{g}_1 \dots \bar{g}_{n-t})$ LIBERA e $\alpha_i \neq 0$!

$\Rightarrow f(\bar{g}_1) \dots f(\bar{g}_{n-t})$ libere $\Rightarrow$

$\dim \operatorname{Im}(f) = n - t = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$ $\square$

Siano V, W due sottospazi. Allora V e W sono detti isomorfi se $\exists f : V \to W$ lineare e invertibile.

In particolare se V, W sono isomorfi $\Rightarrow \exists f$:

f è iniettiva $\Rightarrow$ ~~dim~~ $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$

e f è suriettiva $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim W$

perché $\operatorname{Im} f$ genera tutto W.

$\Rightarrow \dim V = \dim W$

Teorema: Siano V, W due sp. vettoriali f.g. sul campo $\mathbb{K}$.
Se $\dim(V) = \dim(W) \Rightarrow V \cong W$ isomorfo.

DIM: Fissiamo $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ base di V

$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ base di W.

Definiamo $f(\alpha_1\bar{e}_1 + \dots + \alpha_n\bar{e}_n) := \alpha_1 f(\bar{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\bar{e}_n)$

$= \alpha_1\bar{e}_1' + \dots + \alpha_n\bar{e}_n'$

OSS: 1) f è lineare $\bar{v}_1 = \alpha_1\bar{e}_1 + \dots \alpha_n\bar{e}_n$

$\bar{v}_2 = \beta_1\bar{e}_1 + \dots \beta_n\bar{e}_n$

$$f(\gamma \bar{v}_1 + \delta \bar{v}_2) =$$

$$= f\left(\gamma(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n) + \delta(\beta_1 \bar{e}_1 + \dots \beta_n \bar{e}_n)\right) =$$

$$\dots = f\left((\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1)\bar{e}_1 + \dots + (\gamma\alpha_n + \delta\beta_n)\bar{e}_n\right) =$$

$$= (\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1) f(\bar{e}_1) + \dots + (\gamma\alpha_n + \delta\beta_n) f(\bar{e}_n) =$$

$$= (\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1)\bar{e}_1' + \dots + (\gamma\alpha_n + \delta\beta_n)\bar{e}_n' =$$

$$\vdots$$

$$= \gamma f(\bar{v}_1) + \delta f(\bar{v}_2).$$

ok

2) Suriettiva: immediato perché $Im(f) = \langle f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n) \rangle$
$= \langle \bar{e}_1' \dots \bar{e}_n' \rangle = W$

3) Iniettiva

$$\ker(f) = \{\alpha_1\bar{e}_1 + \dots + \alpha_n\bar{e}_n \mid f(\alpha_1\bar{e}_1 + \dots + \alpha_n\bar{e}_n) = \underline{0}\}$$

$$= \{\alpha_1\bar{e}_1 + \dots + \alpha_n\bar{e}_n \mid \alpha_1\bar{e}'_1 + \dots + \alpha_n\bar{e}'_n = \underline{0}\}.$$

$=$ visto che $(\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$ libera $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

$\{\underline{0}\}$. ✓ $\square$

COROLLARIO: Siano U, V s. vettoriali f. g.

$$\Rightarrow U \cong V \iff \dim U = \dim V.$$

In particolare se $\boxed{\dim U = n \Rightarrow U \cong \mathbb{K}^n}$

L'isomorfismo da U in $\mathbb{K}^n$ si costruisce rapp. i vettori in componenti rispetto una base fissata. #

Teorema: Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale di dimensione finita n sul campo $\mathbb{K}$ e sia $\mathcal{B}$ una sua base. $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

ALLORA LA FUNZIONE

$$\psi_{\mathcal{B}} : V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\alpha_1\bar{e}_1 + \dots + \alpha_n\bar{e}_n \longrightarrow (\alpha_1 \dots \alpha_n)$$

é un isomorfismo di spazi vettoriali

N.B: $\psi_{\mathcal{B}}$ dipende dalla base $\mathcal{B}$!!!