- Sequenze libere e legate.
- Sequenze di generatori.

$V(\mathbb{K})$ $\qquad W \leq V(\mathbb{K})$ sottospazio

per descrivere W
- forniamo delle equazioni
- forniamo una seq. di generatori.

$$W = \mathcal{L}\left((1100),(0100),(1110)\right) =$$

$$= \{\alpha(1100)+\beta(0100)+\gamma(1110) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Sia X un insieme/sequenza di vettori.

Se X è linearmente dipendente (= legato) allora $\exists\, \bar{x} \in X$ tale che $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{\bar{x}\})$.

CONSEGUENZE

1) Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora o $V(\mathbb{K}) = \{\underline{0}\}$, oppure $\exists\, X$ tale che $V(\mathbb{K}) = \mathcal{L}(X)$ ed X formato da vettori liberi (o l. indipendenti).

<u>DIM</u>: $V(\mathbb{K})$ f. g. significa $\exists\, Y \subseteq V(\mathbb{K})$ tale che $|Y| < \infty$ e $V = \mathcal{L}(Y)$

Step 1

Y è libero? sì $\Rightarrow$ restituiamo $X = Y$

no

1) $\mathcal{Y} = \emptyset$?
- sì $\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y}) = \{\underline{0}\}$; $X = \emptyset$
- no continuiamo.

2) $\mathcal{Y}$ è libero
- sì $\rightarrow X = \mathcal{Y}$ fine
- no $\Rightarrow \exists \bar{y} \in \mathcal{Y}$:

$$\mathcal{L}(\mathcal{Y} \setminus \{\bar{y}\}) = \mathcal{L}(\mathcal{Y}).$$

sostituiamo ad $\mathcal{Y} \leftarrow \mathcal{Y} \setminus \{\bar{y}\}$

e torniamo al punto 1

METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI.

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ si dice **BASE (ORDINATA)** OGNI SEQUENZA LIBERA DI GENERATORI DI $V(\mathbb{K})$.

Teorema: Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale e sia $\mathcal{B}$ una sua sequenza di vettori. Allora $\mathcal{B}$ è una base (ordinata) di $V(\mathbb{K})$ se e solamente se ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ si scrive in modo unico come c. lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ base (ordinata) di $V(\mathbb{K})$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \bar{v} \in V \ \exists! (\alpha_1, \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$$

$\mathcal{B} = (\rightarrow, \uparrow)$

$\nearrow = \alpha \rightarrow + \beta \uparrow \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$(\alpha, \beta) = (4, 4)$

$\mathcal{B}' = (\nearrow, \nwarrow)$

$\nearrow = \alpha' \nearrow + \beta' \nwarrow$

$(\alpha', \beta') = (4, 0)$

RISPETTO BASI DIVERSE UN VETTORE HA COMPONENTI DIVERSE (COMPONENTI = coeff. dell'unica c. lineare che dà il vettore).

$$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a, b, c, d).$$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$(b, a, d, c)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}'' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

esercizio ...

DIM: 1) $\mathcal{B}$ base ordinata $\Rightarrow$

$\mathcal{B}$ è sequenza di generatori $\Rightarrow$

$V = \mathcal{L}(\mathcal{B})$ e quindi ogni vettore di

V si scrive come c. lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.

$[\forall \bar{v} \in V \ \exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n .]$

Supponiamo per assurdo $\exists \bar{v} \in V$ tale che

$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_n \bar{v}_n$ con

$(\alpha_1, \dots \alpha_n) \neq (\beta_1 \dots \beta_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{v} - \bar{v} = \underline{0} = (\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n) - (\beta_1 \bar{v}_1 + \dots \beta_n \bar{v}_n) =$

$= (\alpha_1 - \beta_1)\bar{v}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\bar{v}_n$

AVREMMO DUNQUE UNA C. LINEARE DEI VETTORI DI $\mathcal{B}$

che dà $\underline{0}$ a coeff. non tutti zero!
(perché almeno un $\beta_i \neq \alpha_i$) $\Rightarrow$ ASSURDO
perché $\mathcal{B}$ è una sequenza libera.

2) $\forall \bar{v} \in V \ \exists! (\alpha_1 \dots \alpha_n) : \bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$ (*)

Innanzi tutto se $\bar{v} = \underline{0}$ (*) ci dice che lo possiamo scrivere in un unico modo
ma $\underline{0} = 0 \cdot \bar{v}_1 + \dots + 0 \cdot \bar{v}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ deve essere libera.
Inoltre (*) ci dice che se $\bar{v} \in V \ \exists (\alpha_1 \dots \alpha_n)$:
$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n \Rightarrow \bar{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$ è seq. di generatori.

$\square$

BASE — GENERATORI
BASE — LIBERA

Sia $\mathcal{G}$ una seq di generatori $\Rightarrow$ se X è un insieme di vettori si ha che $\mathcal{G} \cup X$ è ancora di generatori.

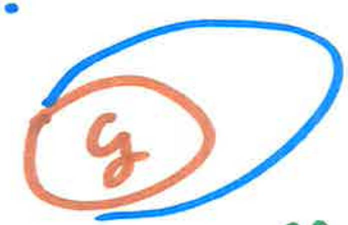
In generale se $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{G}$ non è detto $\mathcal{Y}$ di generatori:

$\mathcal{G} = ((1 0 0), (1 1 0), (0 0 1))$ GENERA $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{Y} = ((1 0 0), (1 1 0))$ NON GENERA $\mathbb{R}^3$

se $\mathcal{G}$ legata $\Rightarrow \exists\, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{G}$, $\mathcal{Y} \neq \mathcal{G}$ tale

che $\mathcal{Y}$ di generatori.



Sia $\mathcal{U}$ una sequenza libera di vettori di $V(\mathbb{K})$.

se $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{Y}$ è libera.

$\mathcal{U}$ libera $\mathcal{U} = (\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n) \iff$

$$\alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_n \bar{u}_n = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

sia $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{U}$, se $\mathcal{Y}$ fosse legata $\Rightarrow \exists\, \beta_2 \dots \beta_n$ tali

$\mathcal{Y} = (\bar{u}_2 \dots \bar{u}_n)$ che $(\beta_2, \dots \beta_n) \neq (0\, 0 \dots 0)$

e $\beta_2 \bar{u}_2 + \dots + \beta_n \bar{u}_n = \underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \cdot \bar{u}_1 + \beta_2 \bar{u}_2 + \dots + \beta_n \bar{u}_n = \underline{0} \Rightarrow \mathcal{U}$ legata ↯

In $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{U} = ((1001), (0110)) \quad \text{LIBERA}$$

$$\mathcal{U}' = ((1001), (0110), (1000)) \quad \text{LIBERA}$$

$$\mathcal{U}'' = ((1001), (0110), (1111)) \quad \text{LEGATA!}$$

<u>Teorema</u>: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale finitamente generato e siano

$A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$ una sua seq. libera di vettori

$B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ una sua seq. di generatori

$\Rightarrow |A| \leq |B|$ (cioè $m \leq n$).

[Lemma di Steinitz]

COROLLARIO: Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale $V(\mathbb{K}) \neq \{\underline{0}\}$ che ammette una seq. di generatori di cardinalità n e una seq. libera di cardinalità k.

ALLORA

1) Una sequenza con $m > n$ vettori non può essere libera.
2) Una sequenza con $m < k$ vettori non può essere di generatori.
3) Ogni base di $V(\mathbb{K})$ ha la medesima cardinalità $= d$

Tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori

4) Ogni sequenza libera di d vettori è anche di generatori
5) Ogni sequenza di d generatori è anche libera

BASI.

4) una seq. libera col numero massimo di vettori è una base

5) una seq. di generatori col numero minimo di vettori è una base.

DIM

1) e 2) sono immediate dato il lemma di Steinitz

[STEINITZ DICE CHE UNA SEQ. LIBERA HA AL PIÙ n elementi con $n = \#$ seq. di generatori e quindi se $m > n$ la seq. non è libera. viceversa una seq. di generatori ha almeno k elementi con $k = \#$ seq. libera. se ne ha di meno non è di generatori].

3) Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi; quindi sia $\mathcal{B}$ che $\mathcal{B}'$ sono seq. libere di generatori:

~~SIA~~ CONSIDERIAMO

$\mathcal{B}$ libera $\qquad \mathcal{B}'$ di generatori

$$\Rightarrow |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$$

$\mathcal{B}$ di generatori, $\mathcal{B}'$ libera

$$\Rightarrow |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$$

MA DALLE DUE DISUGUAGLIANZE

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$$

4) Supponiamo di avere una seq. libera S che ha la stessa cardinalità di una base $\Rightarrow$ essa ha il numero max possibile di vettori.

Se questa non fosse una seq. di generatori per $V(\mathbb{K}) \Rightarrow \exists\, \bar{w} \in V(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{L}(S)$

ma allora $S \cup \{\bar{w}\}$ sarebbe libera

perché se $S = (\bar{s}_1 \dots \bar{s}_n)$

$$S \cup \{\bar{w}\} = (\bar{s}_1 \dots \bar{s}_n, \bar{w})$$

$$\alpha_1 \bar{s}_1 + \alpha_2 \bar{s}_2 + \dots + \alpha_n \bar{s}_n + \beta \bar{w} = \underline{0}$$

se fosse $\beta \neq 0 \Rightarrow \bar{w} = \beta^{-1}(-\alpha_1 \bar{s}_1 \dots)$

$\Rightarrow \bar{w} \in \mathcal{L}(S)$ ASSURDO $\lightning$

deve essere $\beta = 0$ e $\exists i : \alpha_i \neq 0$

$$\underline{0} = \alpha_1 \bar{s}_1 + \alpha_2 \bar{s}_2 + \dots + \alpha_i s_i + \dots + \alpha_n \bar{s}_n + 0 \cdot w =$$

$$= \alpha_1 \bar{s}_1 + \alpha_2 \bar{s}_2 + \dots + \alpha_i \bar{s}_i + \dots \alpha_n \bar{s}_n$$

con $\alpha_i \neq 0$ $\lightning$ perché S è libera.

$\Rightarrow$ S è di generatori.

5) Sia S di generatori con $|S| = |\mathcal{B}|$

$\Rightarrow$ Se S fosse legata potremmo scartare un vettore $\bar{s} \in S$ e $S \setminus \{\bar{s}\}$ sarebbe ancora di generatori ↯ perché avremmo una seq. di generatori con meno vettori di una seq. libera (la base $\mathcal{B}$). $\square$

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Se $V(\mathbb{K}) = \{\underline{0}\}$ allora si dice che la dimensione $V(\mathbb{K})$ è 0 e si scrive

$$\dim V(\mathbb{K}) = 0.$$

ALTRIMENTI LA DIMENSIONE DI $V(\mathbb{K})$ È LA CARDINALITÀ DI UNA SUA QUALSIASI BASE

$$\dim V(\mathbb{K}) := \begin{cases} 0 & \text{se } V(\mathbb{K}) = \{\underline{0}\} \\ n = |\mathcal{B}| \text{ con } \mathcal{B} \text{ base} & \text{se } V(\mathbb{K}) \neq \{\underline{0}\}. \end{cases}$$

<u>OSS</u>: $\left[\dim V(\mathbb{K}) = \min\{ |S| \mid \mathcal{L}(S) = V \} = \right.$

$\left. = \max\{ |T| \mid T \subseteq V;\ T \text{ libera} \}. \right]$

$$|\mathbb{R}^3| = \infty \qquad \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}.$

$\mathbb{K}^n$ s. vettoriale delle n-uple.

ammetto sempre come base

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n)$

$\bar{e}_1 = (1\,0\,0 \dots 0)$

$\bar{e}_2 = (0\,1\,0 \dots 0)$

$\vdots$

$\bar{e}_n = (0\,0\,0 \dots 0\,1)$

BASE CANONICA

$\mathbb{R}^4$

$(2,7,3,5) = 2\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 + 5\bar{e}_4$

$(2\ 7\ 3\ 5)$

Rispetto la base canonica il vettore $\bar{v}$ delle componenti di un vettore $\bar{v} \in \mathbb{K}^n$ é $\bar{v}$ stesso.

N.B: $((1000), (0010), (0100), (0001))$ NON È LA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^4$

$(1\,2\,3\,4) \rightarrow 1\cdot(1000) + 3\cdot(0010) + 2\cdot(0100) + 4\cdot(0001)$

$(1\,3\,2\,4) \neq (1\,2\,3\,4)$

$((1234), (0100), (0010), (0001))$

(1234) ha componenti $(1\,0\,0\,0)$

$\mathbb{R}[x]$ come s. vettoriale su $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 4} = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \leq 4 \} =$$

$$= \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \mid a_i \in \mathbb{R} \}$$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ $\quad \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 4} = 5$

$3x^2 + 5x^4 \rightarrow$ rispetto a $\mathcal{B}$ ha componenti

$(0, 0, 3, 0, 5)$

$$\mathcal{B}' = (1-x^2,\ x+2,\ x^2+x^4,\ x^4,\ x^3-x^2)$$

$$3x^2+5x^4 = 0\cdot(1-x^2)+0(x+2)+3(x^2+x^4)+2x^4+0\cdot(x^3-x^2)$$

$$(0\ \ 0\ \ 3\ \ 2\ \ 0)$$

DIM DI STEINITZ

$$|\text{Seq. libera}| \leq |\text{Seq. di gen.}|$$
$$m \leq n.$$

Sia $A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$ una seq. libera

$B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ una seq. di generatori.

Supponiamo per assurdo $m > n$.

B di generatori $\Rightarrow \bar{a}_1 \in \mathcal{L}(B)$

$\Rightarrow \exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \bar{a}_1 = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n$

OSSERVIAMO CHE NON PUÓ ESSERE $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ PERCHÉ ALTRIMENTI $\bar{a}_1 = \underline{0}$ MA UNA SEQ. LIBERA NON PUÓ CONTENERE $\underline{0}$ perché $\underline{0} = 1 \cdot \underline{0}$

SUPPONIAMO WLOG (WITHOUT LOSS OF GENERALITY) SENZA PERDERE IN GENERALITÁ $\alpha_1 \neq 0$

$$\Rightarrow \bar{a}_1 = \alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n$$

$$\alpha_1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \bar{b}_1 = \bar{a}_1 - \alpha_2 \bar{b}_2 \dots - \alpha_n \bar{b}_n$$

$$\Rightarrow \bar{b}_1 = \alpha_1^{-1} (\bar{a}_1 - \alpha_2 \bar{b}_2 \dots - \alpha_n \bar{b}_n)$$

$$\Rightarrow \bar{b}_1 \in \mathcal{L}(\bar{a}_1, \bar{b}_2, \dots \bar{b}_n)$$

$$\mathcal{B}^{(1)} = (\bar{a}_1, \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$$

OSSERVIAMO CHE $\mathcal{B}^{(1)}$ È UNA SEQ DI GENERATORI.

Infatti se $\bar{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}) \Rightarrow$

$$\bar{v} = \beta_1 \bar{b}_1 + \dots + \beta_n \bar{b}_n =$$

$$= \beta_1 (\alpha_1^{-1} \bar{a}_1 - \alpha_2 \bar{b}_2 \dots - \alpha_n \bar{b}_n) + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_n \bar{b}_n$$

$$\Rightarrow \bar{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)}) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)})$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)})$

$A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m \dots \bar{a}_m)$

$B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_m)$

$B^{(1)} = (\bar{a}_1\, \bar{b}_2 \dots \bar{b}_m)$

$B^{(2)} = (\bar{a}_1\, \bar{a}_2\, \bar{b}_3 \dots \bar{b}_m)$

Spostare i vettori da A in B. ottenendo sempre seq. di generatori.

$\bar{a}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)}) \Rightarrow \bar{a}_2 = \gamma_1 \bar{a}_1 + \beta_2' \bar{b}_2 + \dots + \beta_m' \bar{b}_m$

D'altro canto A è libera e quindi non può essere $\beta_2' = \beta_3' = \dots = \beta_n' = 0$ perché altrimenti

$\bar{a}_2 = \gamma_1 \bar{a}_1$ ed A non sarebbe libera.

WLOG: $\beta_2' \neq 0 \Rightarrow$

$$\beta_2' \bar{b}_2 = \bar{a}_2 - \gamma_1 \bar{a}_1 - \beta_3' \bar{b}_3 \cdots - \beta_n' \bar{b}_n$$

$$\Rightarrow \bar{b}_2 = \beta_2'^{-1} \left(\bar{a}_2 - \gamma_1 \bar{a}_1 \cdots \right)$$

$$\Rightarrow \bar{b}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(2)}) \text{ ove}$$

$$\mathcal{B}^{(2)} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_3 \ldots b_n)$$

COME PRIMA SI VERIFICA

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}^{(2)}) = \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)}) = \mathcal{L}(\mathcal{B})$$

Dopo $n-1$ passaggi.

$$A = (\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n \ldots \bar{a}_m)$$

Tutti di generatori

$$\mathcal{B} = (\bar{b}_1 \ldots b_n)$$
$$\mathcal{B}^{(1)} = (\bar{a}_1 \bar{b}_2 \ldots b_n)$$
$$\mathcal{B}^{(2)} = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{b}_3 \ldots b_n).$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{B}^{(n-1)} = (\bar{a}_1 \; \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_{n-1} \; \bar{b}_n)$$
$$\mathcal{B}^{(n)} = (\bar{a}_1 \; \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_{n-1} \; \bar{a}_n)$$

D'altro canto $|A| = m > n$ quindi $\exists \, \bar{a}_{n+1} \in A$

e $\bar{a}_{n+1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^{(n)})$ ma $\mathcal{B}^{(n)}$ è fatta di vettori di $A \Rightarrow$

$$\bar{a}_{n+1} = \delta_1 \bar{a}_1 + \dots + \delta_n \bar{a}_n$$

e dunque A sarebbe legata $\lightning$

$\Rightarrow m \leq n$ $\square$

Teorema di completamento della base.

- Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione n nel campo $\mathbb{K}$ e sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una sua qualsiasi base fissata.
- Sia ora $A = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ una sequenza libera di vettori di $V_n(\mathbb{K})$.

ALLORA $\exists$ sempre $n-k$ vettori in $\mathcal{B}$ tali che aggiunti questi vettori ad A si ottenga una base di $V_n(\mathbb{K})$.

Esempio.

In $\mathbb{R}^5$.

$$A = ((1\,2\,3\,0\,0), (0\,0\,1\,5\,7))$$

$$\mathcal{B} = ((1\,0\,0\,0\,0), (0\,1\,0\,0\,0), (0\,0\,1\,0\,0), (0\,0\,0\,1\,0), (0\,0\,0\,0\,1))$$

posso estrarre da $\mathcal{B}$ 3 vettori tali che aggiunti ad A ottengo una base di $\mathbb{R}^5$

I vettori non si possono prendere "a caso":

$$\mathcal{C} = ((1\,2\,3\,0\,0), (0\,0\,1\,5\,7), (1\,0\,0\,0\,0), (0\,1\,0\,0\,0), (0\,0\,1\,0\,0))$$

NON È UNA BASE DI $\mathbb{R}^5$

$$(1\,2\,3\,0\,0) + 0\,(0\,0\,1\,5\,7) - 1\,(1\,0\,0\,0\,0) - 2\,(0\,1\,0\,0\,0) - 3\,(0\,0\,1\,0\,0) = \underline{0}$$

NON È LIBERA!

$\to (1\,2\,3\,0\,0)$ $(0\,0\,1\,5\,7)$

$(1\,0\,0\,0\,0)$ $(0\,1\,0\,0\,0)$ $(0\,0\,1\,0\,0)$ $(0\,0\,0\,1\,0)$ $(0\,0\,0\,0\,1)$.

$$(1\,2\,3\,0\,0) = 1\cdot(1\,0\,0\,0\,0) + 2\cdot(0\,1\,0\,0\,0) + 3\cdot(0\,0\,1\,0\,0)$$

$(1\,2\,3\,0\,0)$ $(0\,1\,0\,0\,0)$ $(0\,0\,1\,0\,0)$ $(0\,0\,0\,1\,0)$ $(0\,0\,0\,0\,1)$

$$(0\,0\,1\,5\,7) = 1\cdot(0\,0\,1\,0\,0) + 5\,(0\,0\,0\,1\,0) + 7\,(0\,0\,0\,0\,1)$$

$(1\,2\,3\,0\,0)$ $(0\,1\,0\,0\,0)$ $(0\,0\,1\,5\,7)$ $(0\,0\,0\,1\,0)$ $(0\,0\,0\,0\,1)$

con queste posizioni i vettori da aggiungere sono $(01000), (00010), (00001)$

1) Definizione di sp. vett.
2) Generazione
3) Introdurre delle "coordinate"

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale di dim $= n$ nel campo $\mathbb{K}$ e siano

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$
$\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$

due sue basi.

In particolare ogni vettore di $\mathcal{B}'$ si scrive come c. lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.

$$\begin{cases} \bar{e}_1' = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n \\ \bar{e}_2' = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{2n}\bar{e}_n \\ \vdots \\ \bar{e}_n' = a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n \end{cases}$$

$$E' = \begin{bmatrix} \bar{e}_1' \\ \bar{e}_2' \\ \vdots \\ \bar{e}_n' \end{bmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

$$E' = AE$$

<u>N.B</u> Il prodotto righe per colonne funziona

come

$$(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n) \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix} = x'_1\bar{e}'_1 + x'_2\bar{e}'_2 + \ldots + x'_n\bar{e}'_n$$

supponiamo di avere un vettore $\bar{v}$ le cui componenti sono $(v'_1 \ldots v'_n)$ rispetto la base $\mathcal{B}'$ e $(v_1 \ldots v_n)$ rispetto la base $\mathcal{B}$

$$\bar{v} = v'_1\bar{e}'_1 + \ldots + v'_n\bar{e}'_n = v_1\bar{e}_1 + \ldots + v_n\bar{e}_n$$

$$(v_1' \dots v_n')\, E' = (v_1 \dots v_n)\, E = \overline{v}$$

ma $E' = A E$

$$\boxed{(v_1' \dots v_n')\, A}\, E = \boxed{(v_1 \dots v_n)}\, E$$

$(v_1' \dots v_n')\, A$ e $(v_1 \dots v_n)$ rappresentano lo stesso vettore rispetto la base $\mathcal{B}$.

$$\Rightarrow \boxed{(v_1' \dots v_n')\, A = (v_1 \dots v_n)}$$

ci dice che date le componenti del vettore $(v_1' \dots v_n')$ rispetto $\mathcal{B}'$ e moltiplicate per la matrice A otteniamo le comp. rispetto a $\mathcal{B}$.

$$ {}^{T}(v_1 \ldots v_n) = {}^{T}A \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix}. $$