Sottospazi vettoriali

$V(\mathbb{K})$ spazio vettoriale

$X \subseteq V(\mathbb{K})$ sottoinsieme

X é sottospazio $\Longleftrightarrow$

X soddisfa gli assiomi di s.v. rispetto le operazioni di V opportunamente ristrette e troncate ad X.

vogliamo che il dominio sia $X \times X$ per $+$ e $\mathbb{K} \times X$ per $\cdot$ ed il codominio sia X.

$+_V : V \times V \longrightarrow V$

$+_2 : X \times X \longrightarrow V$ restrizione

$+_1 : X \times X \longrightarrow X$ troncata.

Def: Siano $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ scalari

$\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n \in V(\mathbb{K})$ vettori

si dice combinazione lineare con gli scalari $\alpha_1 \dots \alpha_n$ dei vettori $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n$ il vettore

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{w}$$

oss: poiché il prod. di un vettore per uno scalare $\in V$ e così pure la somma di 2 vettori si verifica che $\bar{w} \in V$.

Uno spazio vettoriale è chiuso rispetto le c. lineari dei suoi vettori.

↓ partendo da el. di V e facendo c. lineari si resta in V.

$X \neq \emptyset$

Teorema: $X \subseteq V(\mathbb{K})$ è sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$ e si scrive $X \leq V(\mathbb{K})$ se e solamente se

- X è chiuso rispetto le comb. lineari dei suoi elementi

in altre parole se e solo se

$$\boxed{\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{x}, \bar{y} \in X: \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in X}$$

DIM: $(\Rightarrow)$ HP: $X \leq V(\mathbb{K})$

TS: X chiuso rispetto c. lineari di $\forall$ 2 suoi vettori.

per ipotesi $+ : X \times X \to X$ e $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ sono operazioni su X che hanno immagine dunque contenuta in $X \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{x}, \bar{y} \in X$ $\alpha\bar{x}, \alpha\bar{y} \in X$ e dunque $\alpha\bar{x} + \alpha\bar{y} \in X$.

($\Leftarrow$) HP: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}: \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in X$

TS: $X \leq V(\mathbb{K})$

DOBBIAMO FAR VEDERE CHE

1) $(X, +)$ é un gruppo abeliano

2) $\forall \bar{x} \in X: 1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$

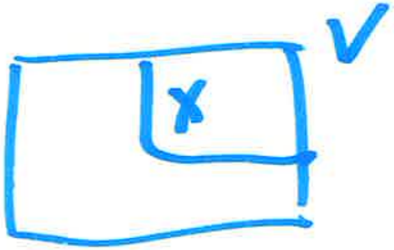
3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{x} \in X: (\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta x$

4) $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in X: \alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$

5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{x} \in X: \alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$

6) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \bar{x} \in X: \alpha\bar{x} \in X$.

sono sicuramente vere!



CI RESTANO DA VERIFICARE 6) e 1).

6) per ipotesi $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{x}, \bar{y} \in X: \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in X$

in particolare se $\beta = 0$ si ha

$$\alpha\bar{x} + 0 \cdot \bar{y} = \alpha\bar{x} \in X$$

1) $(X, +)$ gruppo abeliano $\Leftrightarrow$

a) $\underline{0} \in X$

b) $\forall \bar{x} \in X \ \exists \ -\bar{x} \in X: \ \bar{x} + (-\bar{x}) = \underline{0}$

GRATIS → c) $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in X: \ (\bar{x}+\bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y}+\bar{z})$.

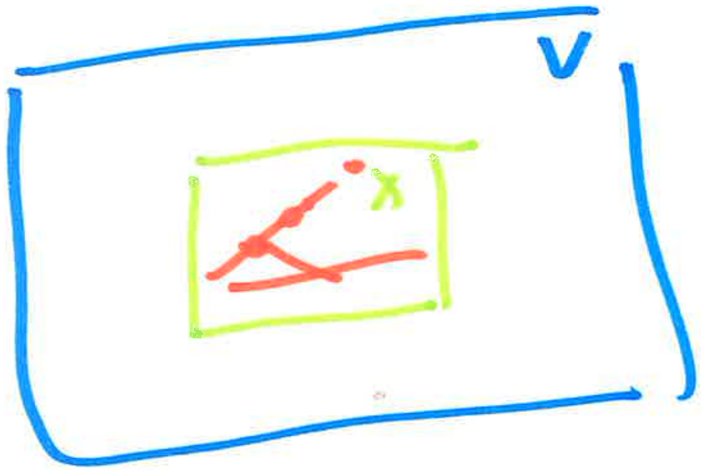
verifichiamo a) e b)

a): $0 \cdot \bar{x} \in X$ per quanto visto prima

ma $0 \cdot \bar{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{0} \in X$

b) per la 6: $-1 \cdot \bar{x} \in X \ \forall \bar{x} \in X$ ma $-1 \cdot \bar{x} = -\bar{x}$ ✓

□



<u>Esempi</u>:

$$\mathbb{R}^3 = \{ (x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R} \}.$$

$$(x,y,z)+(a,b,c) = (x+a,\ y+b,\ z+c)$$

$$\alpha(x\ y\ z) = (\alpha x\ \ \alpha y\ \ \alpha z)$$

é s. vettoriale.

$W = \mathbb{R}^3$ é sottospazio

$W = \{\underline{0}\}$ é sottospazio

] SOTTOSPAZI BANALI

$W = \{ (x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R} \}.$ SOTTOSPAZIO

$\forall (a,b,0), (c,d,0) \in W \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha(a,b,0) + \beta(c,d,0) = (\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d, 0) \in W$ ✓

$W = \{(x,0,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$

$$\alpha(x,0,-x) + \beta(y,0,-y) = (\alpha x + \beta y, 0, -\alpha x - \beta y)$$
$$= (z, 0, -z) \in W$$

con $z = \alpha x + \beta y$.

In generale se $V = \mathbb{K}^n$ con $\mathbb{K}$ campo

$\bar{v} = (v_1 \dots v_n)$

un sottoinsieme W di V definito da un sistema di equazioni di primo grado omogeneo (cioè con termini noti $= 0$) è un s. vettoriale.

Se W è definito da un sistema di eq. non omogeneo $\Rightarrow$ W NON è SOTT. VETTORIALE

In generale se W è definito da un sistema di equazioni non di primo grado $\Rightarrow$ W probabilmente non è un s. vettoriale.

Es:

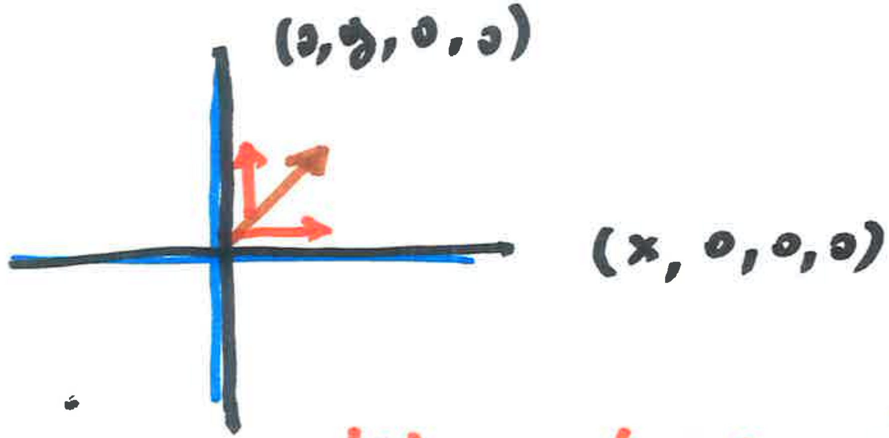
$$\mathbb{R}^4 = \{(x,y,z,t) \mid x,y,z,t \in \mathbb{R}\}.$$

$$W_1 = \{(x\ y\ z\ t) \mid x+y=0 \quad x-y+2t=0\}. \quad ✓$$

$$W_2 = \{(x,y,z,t) \mid x+y=1\} \quad \times$$

OSSERVO CHE $\underline{0} = (0\,0\,0\,0) \notin W_2 \Rightarrow W_2$ non può essere sottospazio.

$$W_3 = \{(x,0,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y,0,0) : y \in \mathbb{R}\}.$$



$\underline{0} \in W_3$

ma $(1\,0\,0\,0) \in W_3$ $(0\,1\,0\,0) \in W_3$

e $(1\,0\,0\,0) + (0\,1\,0\,0) = (1\,1\,0\,0) \notin W_3$ ×

$W_4 = \{ (x,0,0,0) \mid x \geq 0 \}$ non è s. vettoriale

perché $(-1)\cdot(x,0\,0\,0) \notin W_4$

se $x \neq 0$

<u>N.B</u> $W_3 = \{(x, y, 0\,0) \mid xy = 0\}$. eq. non di primo grado! ×

$$W_6 := \{(x,y,0,0) \mid x^2+2xy+y^2=0\} =$$

$$= \{(x,y,0,0) \mid (x+y)^2=0\} =$$

$$= \{(x,y,0,0) \mid x+y=0\}.$$

$\blacksquare$

$$W_7 = \{(x,y,0,0) \mid x^2+y^2=0\}.$$

$$W_7 = \{(x,y,0,0) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2=0\} =$$

$$= \{(x,y,0,0) \in \mathbb{R}^4 \mid x=y=0\} = \{\underline{0}\}.$$

$$W_7' = \{(x,y,0,0) \in \mathbb{C}^4 \mid x^2+y^2=0\} =$$

$i^2=-1$

$$= \{(x,y,0,0) \in \mathbb{C}^4 \mid (x+iy)(x-iy)=0\} =$$

$$= \{(-iy, y, 0, 0) \mid y \in \mathbb{C}\} \cup \{(iy, y, 0\,0) \mid y \in \mathbb{C}\}.$$

NON è s. vettoriale.

$$(-i, 1, 0\,0) + (2i, 2\,0\,0) = (i, 3\,0\,0) \notin W_7'$$

$$W_8 = \{(x, y, 1, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \text{ con}$$

somma $\quad (x, y, 1, 1) \dot{+} (a, b, 1, 1) = (x+a, y+b, 1, 1)$

prod. per sc. $\quad \alpha \cdot (x\ y\ 1\ 1) = (\alpha x, \alpha y, 1, 1).$

W_8 con le operazioni date è s. vettoriale

MA le operazioni non sono quelle di $\mathbb{R}^4$

$\Rightarrow$ non è sottospazio.

Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e sia $X \subseteq V(\mathbb{K})$.

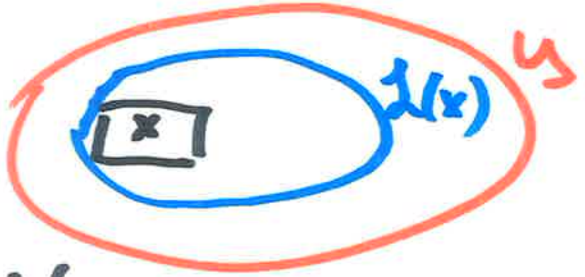
Si dice sottospazio vettoriale generato da X il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene X come insieme.

$\mathcal{L}(X)$ $\quad\langle X \rangle\quad$ $\leq$ $>$ $\quad\langle\ \rangle$

minore
maggiore

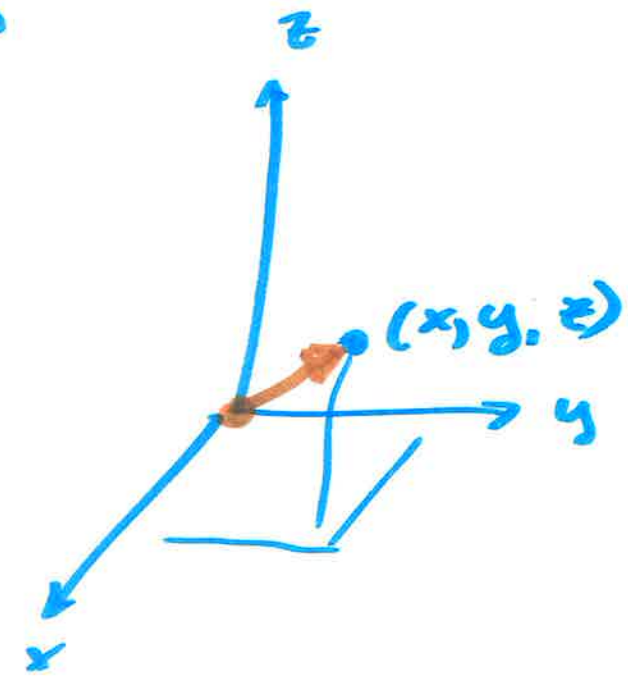
più piccolo significa che se

$$Y \leq V(\mathbb{K}) \text{ e } X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq Y$$



<u>oss</u>: 1) poiché $V \leq V$ esiste sempre almeno un s. vettoriale di V che contiene X.

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$



2) Se $X = \emptyset \Rightarrow \mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\}$.

Teorema:

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i \;\middle|\; \bar{x}_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (*)$$

Il sottospazio vettoriale generato da X coincide con la copertura lineare $(*)$ di X cioè l'insieme di tutte le combinazioni lineari di un numero finito di elementi di X.

DIM: OSSERVIAMO CHE SE $Y \leq V(\mathbb{K})$ e $X \subseteq Y$

$\Rightarrow$ OGNI C. LINEARE DI EL. DI X deve essere in Y

$\Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq Y$.

verifichiamo che $\mathcal{L}(X)$ è un sottospazio.

Siano
$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i \quad \bar{b} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \bar{x}_j \quad \in \mathcal{L}(X)$$

possiamo prendere in $\bar{a}$ e $\bar{b}$ lo stesso n e gli stessi vettori $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$ perché dove non compaiono in entrambe le somme moltiplichiamo per 0.

$$\bar{a} = \bar{x}_1 + 3\bar{x}_3 = \bar{x}_1 + 0 \cdot \bar{x}_2 + 3\bar{x}_3$$

siano $\gamma, \delta \in \mathbb{K}$.

$$\Rightarrow (\gamma\bar{a} + \delta\bar{b}) = \left(\gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i + \delta \sum_{j=1}^{n} \beta_j \bar{x}_j\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma\alpha_i \bar{x}_i + \sum_{j=1}^{n} \delta\beta_j \bar{x}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} (\gamma\alpha_i + \delta\beta_i)\bar{x}_i$$

$$\in \mathcal{L}(X).$$

$\square$

Def: Sia $X \subseteq V(\mathbb{K})$. Si dice che X è un insieme/sequenza di generatori per $V(\mathbb{K})$ se $\mathcal{L}(X) = V$.

Esempio: $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}.$

$$X = \{(1\,0\,0),\ (0\,1\,0),\ (0\,0\,1)\}.$$

$$\mathcal{L}(X) = \{\alpha(1\,0\,0) + \beta(0\,1\,0) + \gamma(0\,0\,1) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(\alpha,\beta,\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

$$Y = \{(1\,1\,1),\ (0\,1\,1),\ (0\,0\,1),\ (1\,2\,3)\}.$$

$\mathcal{L}(Y) = \mathbb{R}^3$ verificare.

→ In generale per generare $\mathbb{K}^n$ servono almeno n vettori.

Esercizi: In $\mathbb{R}^4$ consideriamo gli insiemi

$A = \{(1000), (0100), (1111), (0011)\}$.

✓ $B = \{(1000), (0100), (0010), (0001)\}$.

$(0001) \notin \mathcal{L}(C)$

x $C = \{(1000), (0100), (1011)\}$.

$D = \{(1000), (0100), (1111), (0001), (0011)\}$.

Quali sono generatori?

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \{\alpha(1000) + \beta(0100) + \gamma(0010) + \delta(0001) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathbb{R}^4$$

<u>N.B.</u> Se $X \subseteq V(\mathbb{K})$ ed $Y \subseteq X \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(Y) \subseteq \mathcal{L}(X)$$

In generale: se Y genera $V(\mathbb{K})$ e

$Y \subseteq X \Rightarrow X$ genera $V(\mathbb{K})$

→ AGGIUNGERE VETTORI AD UN INSIEME/SEQUENZA DI GENERATORI DÀ ANCORA UNA SEQ. DI GENERATORI.

→ TOGLIERE VETTORI AD UN INSIEME DI GENERATORI NON È DETTO CI DIA UN INSIEME DI GENERATORI.

→ COME SONO FATTI GLI INSIEMI DI GENERATORI PIÚ PICCOLI POSSIBILE?

$\mathbb{R}^3$

$A = \{(100), (010), (111)\}.$

$B = \{(111), (101), (011), (001)\}.$

$C = \{(100), (010), (001)\}.$

Se parto da A e tolgo un elemento ad A

$\Rightarrow A' = \{(010), (111)\}$ $A'' = \{(100), (111)\}$

$A''' = \{(100), (010)\}.$

$\mathcal{L}(A') \not\ni (1\,0\,0)$ $\qquad$ $\mathcal{L}(A'') \not\ni (0\,1\,0)$

$\mathcal{L}(A''') \not\ni (0\,0\,1)$

Nessun sottoinsieme proprio di A (e nemmeno di C) genera $\mathbb{R}^3$

$B' = \{(1\,0\,1), (0\,1\,1), (0\,0\,1)\}$ es. genera $\mathbb{R}^3$ $\quad$ $(1\,0\,0)$ $(0\,1\,0)$ $(0\,0\,1)$

$B'' = \{(1\,1\,1), (0\,1\,1), (0\,0\,1)\}$ " $\mathbb{R}^3$

$B''' = \{(1\,1\,1), (1\,0\,1), (0\,0\,1)\}$. " $\mathbb{R}^3$

$B^{IV} = \{(1\,1\,1), (1\,0\,1), (0\,1\,1)\}$. " $\mathbb{R}^3$

$C = \{(1\,0\,0), (2\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1)\}.$

C genera $\mathbb{R}^3$

$C' = \{(1\,0\,0), (2\,0\,0), (0\,1\,0)\}$ NON GENERA $\mathbb{R}^3$

$C'' = \{(1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1)\}$ GENERA $\mathbb{R}^3$

ALCUNI SOTTOINSIEMI DI C SONO ANCORA DI GENERATORI PER $\mathbb{R}^3$; ALTRI NO.

COSA CAMBIA?

Def: Sia $(\overline{v}_1, \overline{v}_2 \dots \overline{v}_n)$ una sequenza (lista ordinata!) di vettori di $V(\mathbb{K})$.

Si dice che tale sequenza è <u>libera</u> ovvero che i vettori sono <u>linearmente indipendenti</u> se l'unica combinazione lineare dei vettori dati che dà $\underline{0}$ è quella a coeff. tutti nulli.

$$\alpha_1 \overline{v}_1 + \alpha_2 \overline{v}_2 + \dots + \alpha_n \overline{v}_n = \underline{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

La sequenza è <u>legata</u> o <u>linearmente dipendente</u> se non è libera, cioè esiste una combinazione lineare a coeff. non tutti nulli che dà $\underline{0}$

$\exists\ (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ con $(\alpha_1 \ldots \alpha_n) \neq (0\, 0 \ldots 0)$ tali che

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0}$$

<u>Lemma</u>: Sia $S = (\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \ldots \bar{v}_n)$ una sequenza di vettori

ALLORA S è LEGATA SE E SOLO SE UNO DEI SUOI VETTORI È C. LINEARE DEI RIMANENTI.

<u>DIM</u>: IP: S legata

TS $\exists\ i : \bar{v}_i$ é c. lineare dei rimanenti: cioé $\bar{v}_i \in \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\})$.

S legata $\Rightarrow \exists\ (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \neq (0\,0 \ldots 0)$:

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \ldots + \alpha_i \bar{v}_i + \ldots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0} \quad \text{con } \alpha_i \neq 0$$

$$\alpha_i \bar{v}_i = -\alpha_1 \bar{v}_1 - \alpha_2 \bar{v}_2 - \dots - \alpha_{i-1} \bar{v}_{i-1} - \alpha_{i+1} \bar{v}_{i+1} - \dots - \alpha_n \bar{v}_n$$

$\alpha_i \neq 0 \Rightarrow \exists\, \alpha_i^{-1} \in \mathbb{K}. \Rightarrow$

$$\bar{v}_i = 1 \cdot \bar{v}_i = \alpha_i^{-1}(\alpha_i \bar{v}_i) = \alpha_i^{-1}\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} -\alpha_j \bar{v}_j\right) =$$

$$= \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} -\alpha_i^{-1}\alpha_j \bar{v}_j\right)$$

$\Rightarrow \bar{v}_i \in \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\})$.

Viceversa: HP: $\exists\, i : \bar{v}_i \in \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\})$

TS: S legata.

Se $\bar{v}_i \in \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \Rightarrow \exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n$

tali che

$$\bar{v}_i = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \ldots + \alpha_n \bar{v}_n$$

$$\Rightarrow \quad \underline{0} = \bar{v}_i - \bar{v}_i = \alpha_1 \bar{v}_1 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} - \bar{v}_i + \ldots + \alpha_n \bar{v}_n$$

il vettore $\bar{v}_i$ ha coeff. $-1 \neq 0$

$\Rightarrow$ la sequenza è legata $\square$

CONSEGUENZE: 1) Se S contiene $\underline{0} \Rightarrow S$ é legata.

$\underline{0} = 1 \cdot \underline{0} + \ldots$

2) Se S contiene due vettori uguali

allora S è legata

$$\underline{0} = 1 \cdot \bar{v}_1 + \ldots - 1 \cdot \bar{v}_1 \ldots$$

3) Se S contiene due vettori $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ con $\bar{v}_2 = -\bar{v}_1 \Rightarrow$ è legata

$$\underline{0} = 1 \cdot \bar{v}_1 + 1 \cdot \bar{v}_2 + 0 \ldots$$

$$= \bar{v}_1 - \bar{v}_1 = \underline{0}$$

4) Se S contiene vettori proporzionali $\Rightarrow S$ è legata.

$$\bar{v}_2 = \alpha \bar{v}_1$$

$$\underline{0} = -\alpha \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \ldots = \underline{0}$$

Teorema (degli scarti successivi).

Sia S una sequenza di generatori per $V(\mathbb{K})$.
Allora se S è legata $\exists\, \bar{v} \in S$ tale che $S \setminus \{\bar{v}\}$ genera $V(\mathbb{K})$.

(se S è libera $\Rightarrow \forall\, \bar{v} \in S$, $S \setminus \{\bar{v}\}$ non può generare $V(\mathbb{K})$).

→ Una sequenza di generatori legata per $V(\mathbb{K})$ è "sovrabbondante" ovvero non è minimale.

Si possono sempre scartare elementi da una sequenza legata di generatori in modo da avere ancora una sequenza di generatori.