Campo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ struttura algebrica

$\mathbb{K}$ insieme

$+, \cdot$ operazioni binarie su $\mathbb{K}$ tali che

1) $(\mathbb{K}, +)$ é un gruppo commutativo

2) $(\mathbb{K}^\times, \cdot)$ $\mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ é un gruppo commutativo

3) valgono le prop. distributive

$\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ $a(b+c) = ab + ac$

$(a+b)c = ac + bc.$

N.B in un campo $\forall a \in \mathbb{K}$ $a \cdot 0 = 0$

$a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$

$0 = -(a \cdot 0) + a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + (a \cdot 0) + (a \cdot 0) = (a \cdot 0)$ ∎

$(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p prima

$\mathbb{K}$ campo $\quad (\mathbb{K}(x), +, \cdot)$

$$\mathbb{K}(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x] \\ g(x) \neq 0 \end{array} \right\}.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{h(x)}{t(x)} = \frac{t(x)f(x) + h(x)g(x)}{g(x)t(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{h(x)}{t(x)} = \frac{f(x)h(x)}{g(x)t(x)}$$

CAMPO: → AMBITO IN CUI SI PUÒ STUDIARE E RISOLVERE UNA EQUAZIONE DEL TIPO

$$ax + b = 0$$

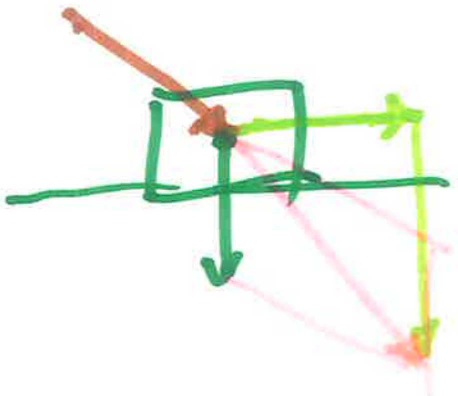
↓

se $a \neq 0 \Rightarrow x = a^{-1}(-b)$

se $a = 0$
- $b = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}$
- $b \neq 0 \Rightarrow 0 = -b \quad \nexists x \in \mathbb{K}$

proprietà comuni di $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ...

vettore → "freccia" che ha una direzione, un verso ed una lunghezza.



operazioni sui vettori

1) "scalare il vettore"

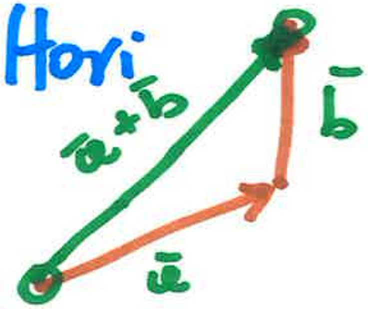
stesso verso
stessa direzione
lunghezza diversa

1') scambiare il verso del vettore

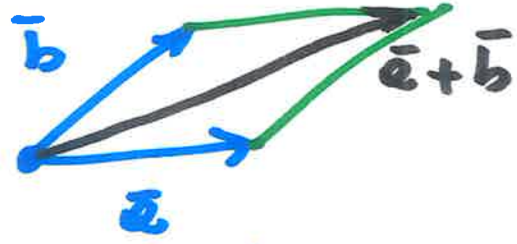
2) sommare 2 vettori

+

=



Definire sull'insieme delle "frecce" S_2 con l'operazione di somma data dalla "legge del parallelogramma"

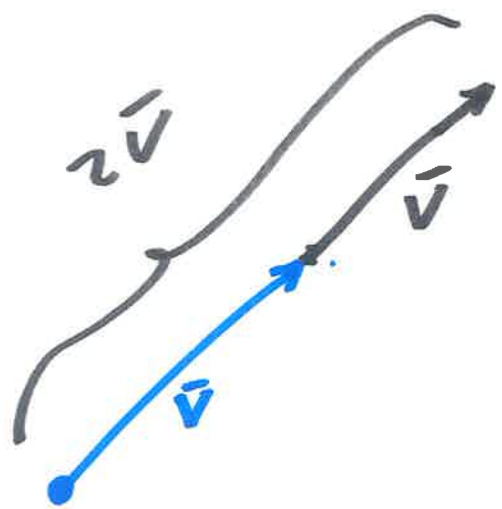


prodotto per scalare

$$\mathbb{R} \times S_2 \longrightarrow S_2$$

$$(\alpha, \nearrow) \longrightarrow \alpha \cdot \nearrow =$$

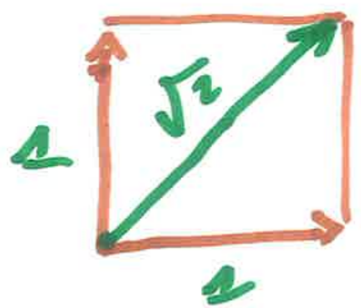
- se $\alpha > 0$ vettore che ha stessa dir. stesso verso e lunghezza α volte lunghezza di $\nearrow$
- se $\alpha < 0$ vettore che ha stessa dir. verso opposto e lungh. $-\alpha$ volte la lungh. di $\nearrow$



$\bar{y} = \frac{1}{2}\bar{v}$

$\bar{y} + \bar{y} = \bar{v}$

$\sqrt{2}\,\bar{v} = ?$



<u>Def.</u> Si dice spazio vettoriale su di un campo $\mathbb{K}$ un insieme $V(\mathbb{K})$ dotato di 2 operazioni

$\tilde{+} : V(\mathbb{K}) \times V(\mathbb{K}) \to V(\mathbb{K})$ somma di vettori

$\tilde{\cdot} : \mathbb{K} \times V(\mathbb{K}) \to V(\mathbb{K})$ prodotto per scalare

Tale che

1) $(V(\mathbb{K}), \tilde{+})$ sia un gruppo abeliano (=commutativo)

2) $\forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})$: $1 \tilde{\cdot} \bar{v} = \bar{v}$ (ove 1 = el. neutro prodotto in $\mathbb{K}$).

3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $\forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})$ $(\alpha + \beta) \tilde{\cdot} \bar{v} = \alpha \tilde{\cdot} \bar{v} \tilde{+} \beta \tilde{\cdot} \bar{v}$

4) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in V(\mathbb{K})$: $\alpha \cdot (\bar{v} \tilde{+} \bar{w}) = \alpha \tilde{\cdot} \bar{v} \tilde{+} \alpha \tilde{\cdot} \bar{w}$

5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})$

$$(\alpha \cdot \beta) \tilde{\cdot} \bar{v} = \alpha \tilde{\cdot} (\beta \tilde{\cdot} \bar{v})$$

1 prod di $\mathbb{K}$

1 prod di $\mathbb{K} \times V \to V$

$\alpha \cdot \beta \in \mathbb{K}$

$\alpha \tilde{\cdot} \underbrace{(\beta \tilde{\cdot} \bar{v})}_{\in V}$

2 prodotti di $\mathbb{K} \times V \to V$.

2) → unitarietà

3,4) pseudo - distributive

5) pseudo - associativa.

$$(\alpha\beta)\bar{v} = \alpha(\beta\bar{v})$$

GLI ELEMENTI DI $\mathbb{K}$ sono detti scalari

DI $V(\mathbb{K})$ sono detti vettori.

prime proprietà.

1) Siano $\alpha \in \mathbb{K}$, $\bar{v} \in V$

$\Rightarrow \alpha \cdot \bar{v} = \underline{0}$

$\Leftrightarrow \alpha = 0$ oppure $\bar{v} = \underline{0}$

$\underline{0}$ = vettore nullo = el. neutro di $(V, +)$

<u>DIM</u>

$$\alpha \cdot (\underline{0} + \underline{0}) = \alpha \cdot \underline{0}$$
$$\parallel$$
$$\alpha \cdot \underline{0} + \alpha \cdot \underline{0}$$

sommando a dx e sx $-(\alpha \cdot \underline{0})$ si ottiene

$$\alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

similmente $\forall \bar{v} \in V$ $\quad 0 \cdot \bar{v} = (0+0) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v}$

da cui $\quad \underline{0} = 0 \cdot \bar{v}$

Supponiamo $\alpha \cdot \bar{v} = \underline{0}$ se $\alpha = 0 \Rightarrow$ ok

sia $\alpha \neq 0$ ed osserviamo che

$\exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ $\quad \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \bar{v}) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0}$

$$\parallel$$

$$(\alpha^{-1}\alpha) \cdot \bar{v} = 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$$

$\Rightarrow \bar{v} = \underline{0}$ $\quad \square$

2) Sia 1 l'identità del prodotto di $\mathbb{K}$ e -1 il suo opposto in $\mathbb{K}$ $\Rightarrow$

$\forall \bar{v} \in V$: $(-1) \cdot \bar{v} = -\bar{v}$

<u>DIM</u>: $(-1) \cdot \bar{v} + \bar{v} = (-1) \cdot \bar{v} + 1 \cdot \bar{v} = (1-1) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v}$

$$= \underline{0}$$

e quindi $(-1) \cdot \bar{v} = -\bar{v}$ $\quad \square$

Esempi

1) $\mathbb{K}$ è uno s. vettoriale su se stesso.

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ $\qquad \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ a, b \longrightarrow a \cdot b \end{cases}$

2) $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ è uno s. vettoriale su $\mathbb{K}$

ove si definiscano $\quad V = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$

$$+ \begin{cases} (\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \times (\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ (a, b), (c, d) \longrightarrow (a+c, b+d) \end{cases}$$

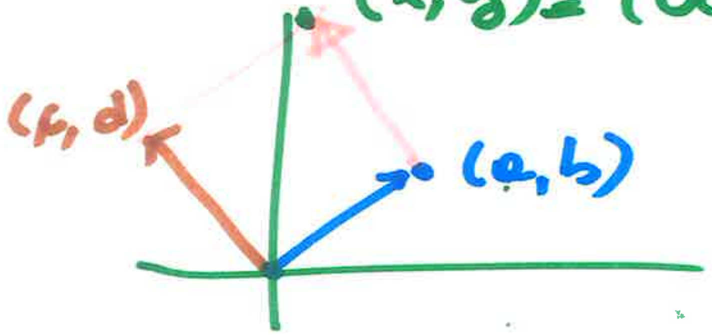
componente per componente

$$\cdot \begin{cases} \mathbb{K} \times (\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ \alpha, (a, b) \longrightarrow (\alpha a, \alpha b). \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2$

i

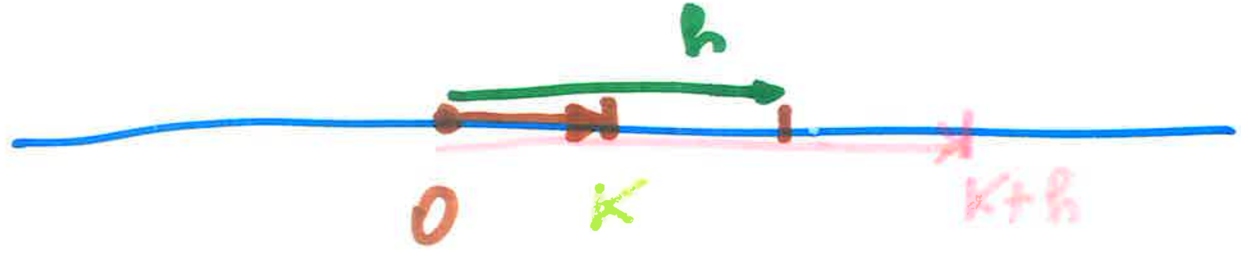
$(x,y) = (a+c,\ b+d)$



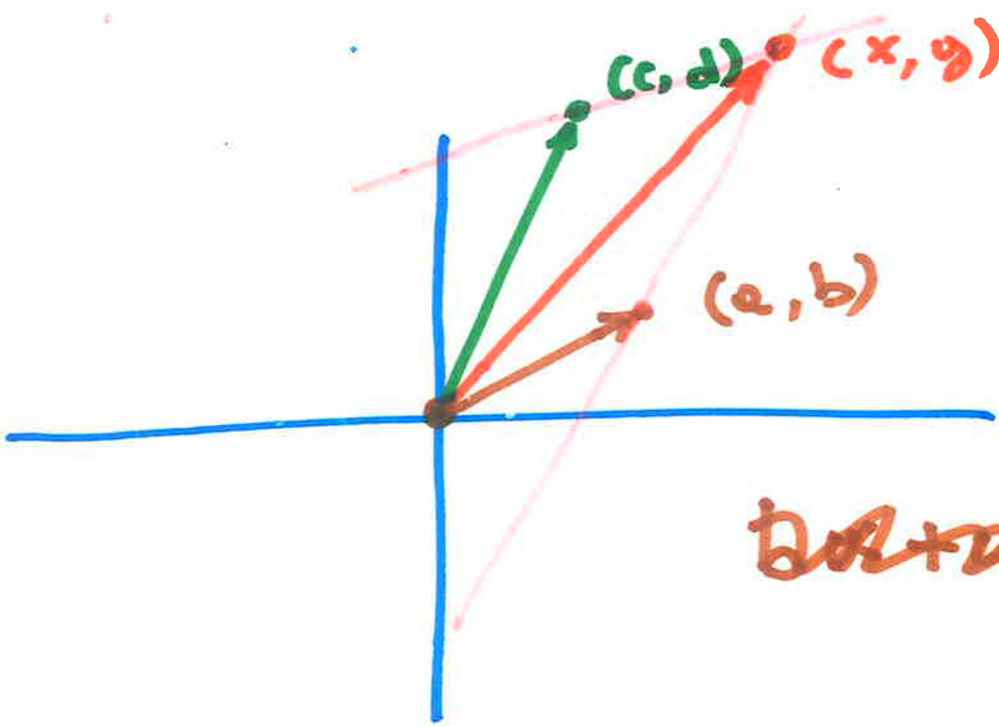
$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{C} \quad \sim \quad \mathbb{R}$

$V = \mathbb{K}$



$V = \mathbb{K}^2$



$bx = ay$

$cy = dx$

$$\begin{cases} d(x-a) = c(y-b) \\ b(x-c) = a(y-d) \end{cases}$$

il sistema ammette al più una soluzione.

verifichiamo se $(a+c, b+d)$ è soluzione:

$$d(a+c-a) = c(b+d-b)$$
$$dc = cd \checkmark$$

$$b(a+c-c) = a(b+d-d)$$
$$ba = ab \checkmark$$

Una n-upla di elementi di un insieme X è una lista ordinata (con ripetizioni) di elementi dello stesso. elemento di $\underbrace{(X \times X) \times X \dots}_{n \text{ volte}}$.

Sia $I = \{1, 2, 3 \dots n\}. \subseteq \mathbb{N}$ una n-upla è una funzione $f : I \to X$

$I = \{1, 2, 3\}.$ $\quad$ $X = \{a, b, c\}.$

$$f(1) = b \qquad (b, a, b) \neq (b, b, a)$$
$$f(2) = a \qquad \neq \underbrace{(a, b, b)}_{\in X^3} \neq (a, a, b)$$
$$f(3) = b$$

Indicherò l'insieme delle n-uple di elementi di X con X^n

Sia X un insieme e $\mathbb{K}$ un campo

$$\mathbb{K}^X = \{ f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ funzione} \}.$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{K}^X$ é uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ rispetto le 2 operazioni:

$$\forall f, g \in \mathbb{K}^X \qquad (f+g) : \begin{cases} X \to \mathbb{K} \\ x \to f(x) + g(x) \end{cases}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \; \forall f \in \mathbb{K}^X : \qquad (\alpha \cdot f) \begin{cases} X \to \mathbb{K} \\ x \to \alpha f(x). \end{cases}$$

Es:
$$((f+g)+h)(x) = ((f+g)(x)+h(x)) = $$
$$= (f(x)+g(x)) + h(x) = $$
$$= f(x) + (g(x)+h(x)) = (f+(g+h))(x)$$

$$\beta(\alpha f)(x) = \beta(\alpha f(x)) = (\beta\alpha) f(x) = $$
$$= ((\beta\alpha) f)(x).$$

<u>OSS</u>: l'insieme di <u>tutte</u> le funzioni $X \to \mathbb{K}$ è s. vettoriale; se ne togliamo alcune non è detto!

In generale un sottoinsieme di uno s. vettoriale non è uno spazio vettoriale.

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $X \subseteq V(\mathbb{K})$.

Si dice che X è sottospazio di $V(\mathbb{K})$ se X è ancora spazio vettoriale (valgono le prop. 1-5) rispetto le operazioni di $V(\mathbb{K})$ opportunamente troncate e ristrette ad X.

$$+ : V(\mathbb{K}) \times V(\mathbb{K}) \to V(\mathbb{K})$$

$$+' : X \times X \to X$$

OSS: 1) gli assiomi generali tipo

$\cancel{\forall x}$ $\forall \bar{x} \in X : 1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ etc.

sono ovviamente validi su X

perché se valgono $\forall \bar{v} \in V \Rightarrow$ valgono

a maggior ragione $\forall \bar{x} \in X$ dato che $\bar{x} \in V$.

2, 3, 4, 5) ✓

7) restringere le operazioni ad X si può

sempre fare.

→ quello a cui bisogna prestare attenzione

è il troncamento! Bisogna che l'immagine

delle operazioni $+ : X \times X \to V(\mathbb{K})$ $\cdot : \mathbb{K} \times X \to V(\mathbb{K})$

sia contenuta in X.

<u>Teorema</u>: $X \leq V(\mathbb{K})$ se e
sottospazio

solamente se $\forall \bar{x}, \bar{y} \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} \in X$

L'insieme X deve essere <u>chiuso</u> rispetto le <u>combinazioni lineari</u> dei suoi vettori.