Algebra e Geometria

↓

studio di strutture e loro trasformazioni.

SPAZIO VETTORIALE

APPLICAZIONI → SISTEMI LINEARI

→ GEOMETRIA EUCLIDEA.

ALGEBRA → studio di strutture algebriche → INSIEMI DOTATI DI OPERAZIONI.

→ linguaggio standard della teoria ingenua degli insiemi. (ZF + assioma della scelta).

INSIEME $\Rightarrow$ collezione di oggetti
non ordinata e senza ripetizioni.

A insieme $\{a_1, a_2 \dots\}$.

$\{x \in B \mid \text{valga } p(x) \dots\}$.

$\{x \mid p(x)\}$.

$a \in A$

SOTTOINSIEME $B \subseteq A \iff \forall b \in B : b \in A$

se e solo se

per ogni

INTERSEZIONE DI DUE INSIEMI $A \cap B := \{a \in A \mid a \in B\}$.

uguale per definizione.

1) $A \cap B = B \cap A$

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \ \& \ x \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in B \ \& \ x \in A \Rightarrow x \in B \cap A$

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

<u>N.B.</u> Se non $\exists\, a \in A : a \in B$ allora

$A \cap B = \emptyset$ insieme vuoto.

e A e B sono <u>disgiunti.</u>

L'intersezione di 2 insiemi è un insieme.

Siano A, B insiemi. Si dice <u>unione</u> di A e B l'insieme C tale che

$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ oppure $x \in B$.

$C = A \cup B$

$C = A \cup B := \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$

per definizione $\quad A \subseteq C = A \cup B$

$\qquad\qquad\qquad\quad B \subseteq C = A \cup B$

Abbiamo che C è il più piccolo insieme che contiene sia A che B.

equivalentemente

se $\quad A \subseteq D,\ B \subseteq D \Rightarrow A \cup B \subseteq D.$

ATTENZIONE: la collezione di tutti gli insiemi non è un insieme (si chiama categoria).

perché se essa fosse un insieme $\mathcal{J}$

$$P \subseteq \mathcal{J} \qquad P = \{X \in \mathcal{J} : X \notin X\}$$

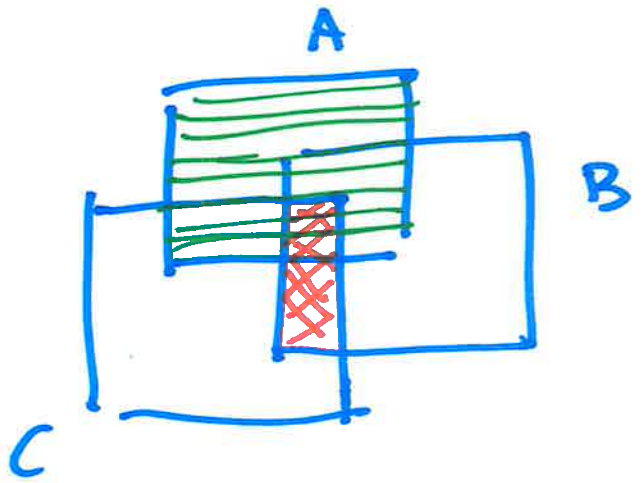
$P \in P$? se vero $\Rightarrow$ non vale la proprietà $\lightning$

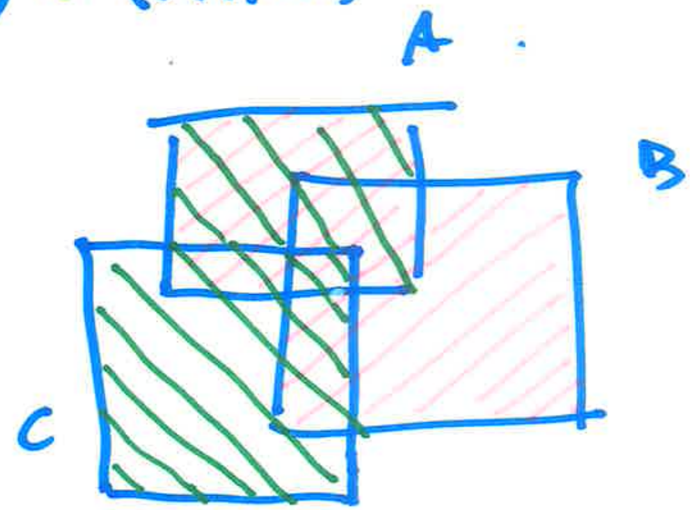
se è falso $\Rightarrow P \notin P \Rightarrow P \in P$ $\lightning$

$\{a : p(a) \ldots\}$ $\quad\quad$ $\{a \mid p(a) \ldots\}$.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$





$A \cup A = A$

$A \cup (A \cap B) = A$

$X \subseteq A$ $\quad$ $A \cup X = A$

$A \cap X = X$

Siano A, B due insiemi.

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A,\ b \in B \}.$$

coppie ordinate.

$a \neq b$: $(a,b) \neq (b,a)$

$(a,a) \neq (b,b)$

$\{a, b\} = \{b, a\}$. $\{a, a\} = \{a\}$

$$(a,b) := \{\{a\}, \{a,b\}\}.$$

$a \neq b \Rightarrow (a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\} \neq \{\{b\},\{a,b\}\} = (b,a).$

$a = b$ $(a,a) = \{\{a\}, \{a,a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}.$

$$(A \times B) \times C = \{ ((a,b),c) \mid \cancel{a,b,c}\ a \in A, b \in B, c \in C \}.$$

$$A \times (B \times C) = \{ (a,(b,c)) \mid a \in A, b \in B, c \in C \}.$$

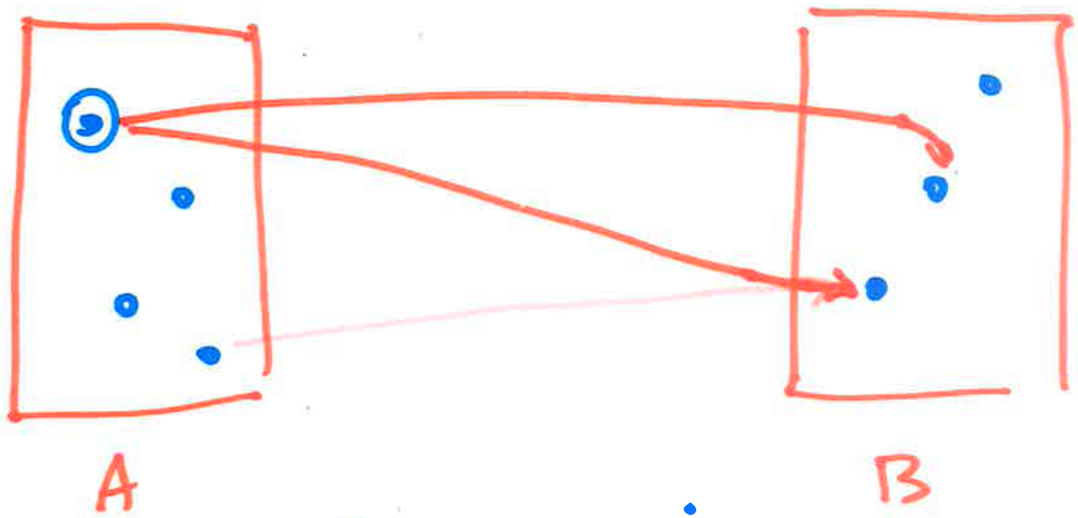
il prodotto cartesiano di 2 insiemi non è associativo $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.

In generale scriverò $A \times B \times C = \{ (a,b,c) \mid a \in A, b \in B, c \in C \}.$

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ volte}}.$$

<u>Def</u>: Corrispondenza C fra un insieme A ed un insieme B.

$$C \subseteq A \times B$$



Def: Una corrispondenza $c : A \to B$ con $c \in A \times B$

è detta ovunque definita se

$\forall a \in A \; \exists b \in B : (a,b) \in c$

da ogni el. di A parte almeno una freccia.

è detta funzionale se

$\forall a \in A \; \exists_{\leq 1} b \in B : (a,b) \in c$

esiste al più uno

da ogni elemento di A parte al più una freccia.

corrispondenza funzionale e ovunque definita

= funzione di dominio A e codominio B.

$f: A \to B$ funzione è $f \subseteq A \times B$ tale che

$\forall a \in A \ \exists! b \in B$ con $(a, b) \in f$

esiste un unico $b \in B$

$f(a) = b$

Funzione $f: A \to B$ è detta

- iniettiva se $\forall b \in B \ \exists_{\leq 1} a \in A : f(a) = b$
- suriettiva se $\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b$
- biiettiva se $\forall b \in B \ \exists! a \in A : f(a) = b$

Def: Sia $f: A \to B$ una funzione
e $g: B \to C$ una funzione.

Si dice funzione composta la funzione $h = g \circ f : A \to C$
definita da $h(a) := g(f(a))$.

OSS 1) h è una funzione
2) la composizione di funzioni è associativa.

cioè se
$$f: A \to B, \quad g: B \to C, \quad h: C \to D \implies \boxed{\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= \\ &= (h \circ g) \circ f \end{aligned}}$$