Coniche: forme canoniche

1) Coniche a centro ⟨ ellissi / iperboli

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

→ origine del rif = centro della conica

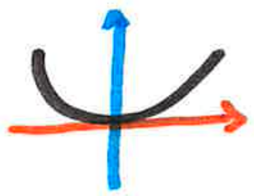
→ assi del riferimento = assi della conica
$x=0$ e $y=0$

2) Coniche non a centro → parabole.

Il centro è un punto improprio.

→ origine del riferimento → vertice.

→ assi del riferimento → asse della parabola
\+
tangente nel vertice
alla parabola.



$y = a x^2$ oppure $x = a y^2$

conica generale che

1) passa per $[(0\,0\,1)] \to$ vertice. $\Rightarrow a_{33} = 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

2) ha punto improprio $[(0\,1\,0)]$ ed è tg. alla retta impropria in tale punto

$$(a_{12} \; a_{22} \; a_{23}) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow \underline{a_{22} = 0}$$

3) $\det A^* = 0 \Rightarrow a_{12}^2 = 0 \Rightarrow a_{12} = 0$

4) r_g. in $(0\,0\,1)$ $\rightarrow$ retta $y=0$

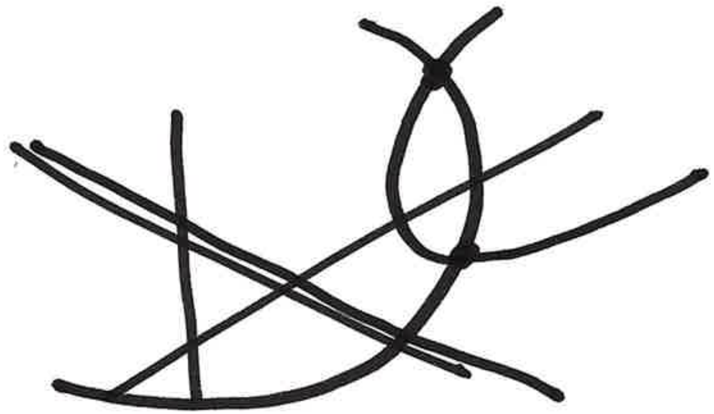
$$[0\ 0\ 1]\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$$

$$a_{13}x_1+a_{23}x_2=0$$
$$\downarrow$$
$$a_{13}x+a_{23}y=0$$

$\rightarrow a_{13}=0$; $a_{23}\neq 0$

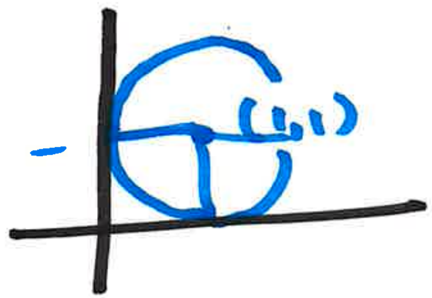
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{y=a x^2}$ $\quad a\in\mathbb{R}.$



Legame con luoghi geometrici

- studiando le coniche in forma canonica.



$y=0$

$x=0$

- proprietà metriche → relazione con i punti ciclici

$$J_\infty = [(1, i, 0)] \quad \overline{J}_\infty = [(1, -i, 0)]$$

Def: Si dicono *fuochi* di una conica le intersezioni delle tangenti proprie alla conica passanti per i punti ciclici.

OSS: Se r_1, r_2 sono le tg a $\mathcal{C}$ per J_∞ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ saranno le tg a $\mathcal{C}$ per $\bar{J}_\infty$

[le coniche sono curve reali]. $r_1 \neq r_2$

$\rightarrow$ In particolare $r_1 \cap \bar{r}_1 = \{F_1\}$ sono
$r_2 \cap \bar{r}_2 = \{F_2\}$

fuochi reali (se $r_1 \neq \bar{r}_1$ e $r_2 \neq \bar{r}_2$).

$$r_1 \cap \bar{r}_2 = F_3$$
$$r_2 \cap \bar{r}_1 = F_4 = \bar{F}_3$$

sono fuochi immaginari e coniugati.

1) r_1 $J_\infty, \bar{J}_\infty \in \mathcal{C} \Rightarrow r_1 = \bar{r}_2$ e $r_2 = \bar{r}_1$

sono le rette tg. in J_∞ e $\bar{J}_\infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ esse si intersecano nel centro della

conica $\Rightarrow$ $\exists!$ fuoco reale ed esso è il

centro della circonferenza.

2) $r_1 = J_\infty \bar{J}_\infty$, $r_2 \neq r_1$ $\rightarrow$ la retta

impropria è una tg a $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ è una

parabola e $r_2 \cap \bar{r}_2$ è l'unico suo fuoco.

3) $r_1 \neq r_2$, $\bar{r}_1 \neq r_2$, $\bar{r}_1 \neq r_2$ $\Rightarrow$ 4 fuochi.

(2 reali e 2 no).

Def: Si dice direttrice ogni **polare** di un fuoco.

punti reali ⇒ direttrice reale.

CONTI: 1) se definiamo le coniche come luoghi geometrici e scegliamo bene il rif. ⇒ otteniamo delle forme canoniche di ellissi/iperboli/parabole.

DEF GEOMETRICA ⇒ DEF ANALITICA.

2) se partiamo dalle coniche definite analiticamente e le mettiamo in forma canonica ⇒ riconosciamo le prop. geometriche.

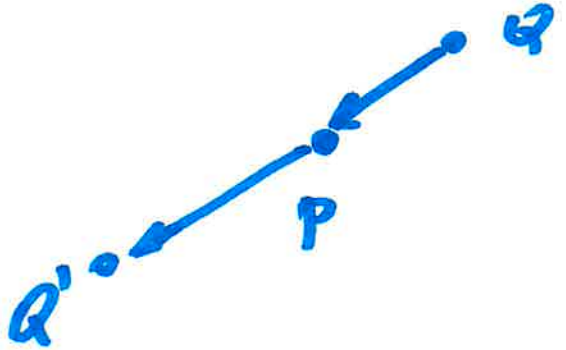
DEF ANALITICA ⇒ DEF. GEOMETRICA.

Def: Sia P un punto fissato.

Si dice <u>simmetria</u> di centro P la funzione

$$\sigma_P : \begin{cases} AG(n,\mathbb{K}) \to AG(n,\mathbb{K}). \\ Q \to Q' \end{cases}$$

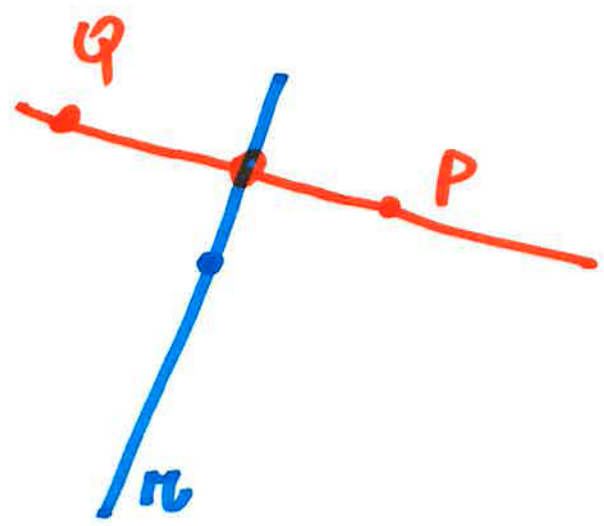
tale che ~~PQ~~ P sia il punto medio fra Q e Q', cioè $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PQ'}$



Si dice riflessione rispetto una retta di $EG(2,\mathbb{R})$ una funzione

$$\psi_r : \begin{cases} EG(2,\mathbb{R}) \to EG(2,\mathbb{R}) \\ P \to Q \end{cases}$$

tale che PQ sia ortogonale ad r e $PQ \cap r$ sia il punto medio fra P e Q.



più in generale si può parlare di riflessioni rispetto iperpiani

→ SIMMETRIE E RIFLESSIONI SONO ISOMETRIE (cioè conservano le distanze fra punti).

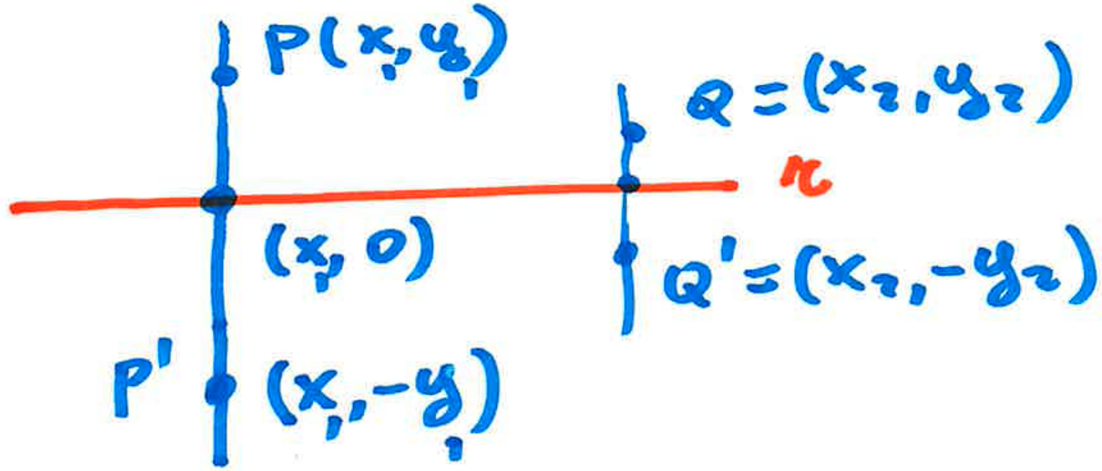
<u>DIM</u>: ~~RIFLESSIONI~~ SIMMETRIA: scegliamo un rif. in cui $P=O$

In particolare $\sigma_0 : (x,y) \to (-x,-y)$

$P=(x_1,y_1)$, $Q=(x_2,y_2)$ $\quad d(\sigma(P),\sigma(Q)) = d((-x_1,-y_1),(-x_2,-y_2))$
$= d(P,Q)$.

RIFLESSIONE:

scelgo rif: r : $y=0$



$$d(P,Q)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 =$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d(P', Q')^2.$$

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 : (x,y) \to (-x,-y)$$

fissa l'eq.

$\Rightarrow \psi_x : (x,y) \to (x,-y)$

$\psi_y : (x,y) \to (-x,y)$

fissano l'eq.

$\Rightarrow$ una conica a centro è simmetrica rispetto i suoi assi e rispetto il centro

$y = ax^2 \to \psi_y : (x,y) \to (-x,y)$ preserva l'eq.

$\to$ anche una parabola è simmetrica rispetto i suoi assi.

Cenno di fasci di coniche/curve.

→ fascio di rette: ∞^1 rette la cui eq. si ottiene come comb. lineare delle eq. di 2 rette distinte.

[rette che passano tutte per un punto]

$$\begin{cases} \lambda(\underbrace{ax_1+bx_2+cx_3}_{r}) + \mu(\underbrace{a'x_1+b'x_2+c'x_3}_{s}) = 0 \\ (\lambda,\mu) \neq (0,0). \end{cases}$$

$P = r \cap s$
centro del fascio.

→ Siano $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ due coniche di matrici A_1 e A_2.

Si dice fascio $\mathcal{F}$ di coniche determinato da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$

l'insieme di tutte le coniche di matrici del tipo

$$\lambda A_1 + \mu A_2 \qquad (\lambda, \mu) \neq (0,0).$$

[facendo comb. lineari delle eq. delle coniche]

- ∞^1 coniche
- $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{F}$
- ogni conica del fascio passa per i punti di $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$

$$P = [(x_1\ x_2\ x_3)] \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \Rightarrow PA_1P^T = 0 \quad PA_2P^T = 0$$
$$\Rightarrow P(\lambda A_1 + \mu A_2)P^T = 0$$

- $\forall$ punto $Q \notin \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ $\exists!$ conica $\mathcal{C}_Q \in \mathcal{F}$ con $Q \in \mathcal{C}_Q$.

$$(\hat{x}_1\ \hat{x}_2\ \hat{x}_3)\left[\lambda A_1 + \mu A_2\right]\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{pmatrix} = 0$$

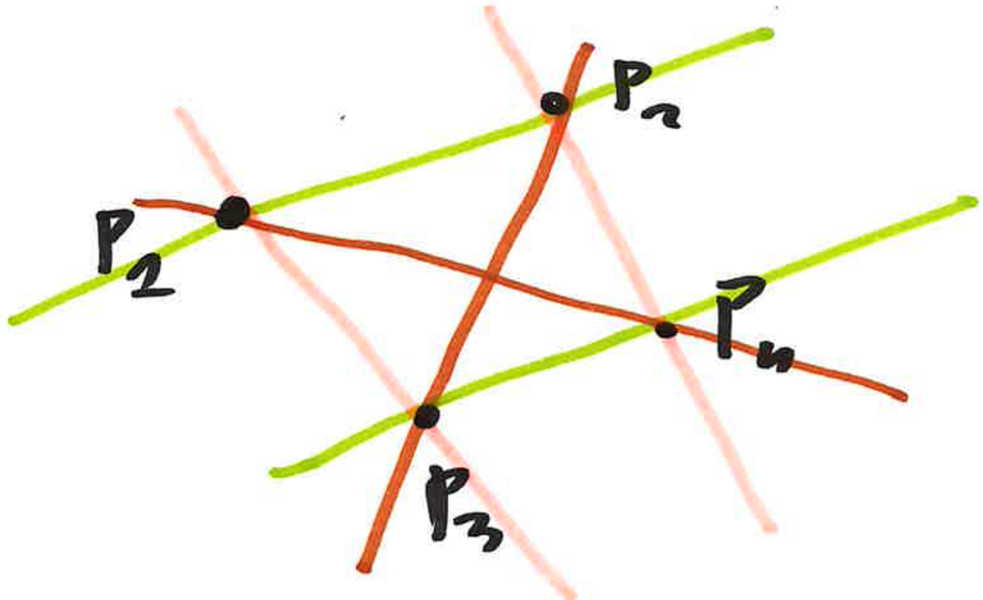
$$\lambda \underbrace{\boxed{(\hat{x}_1\ \hat{x}_2\ \hat{x}_3)A_1\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{pmatrix}}}_{c} = -\mu \underbrace{\boxed{(\hat{x}_1\ \hat{x}_2\ \hat{x}_3)A_2\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{pmatrix}}}_{d}$$

$\lambda c = \mu d$

se $c = 0 \Rightarrow \mu = 0,\ \lambda = 1$

se $c \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{d}{c},\ \mu = 1$

<u>OSS</u>: In generale i punti di $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ sono detti punti base del fascio e sono 4.

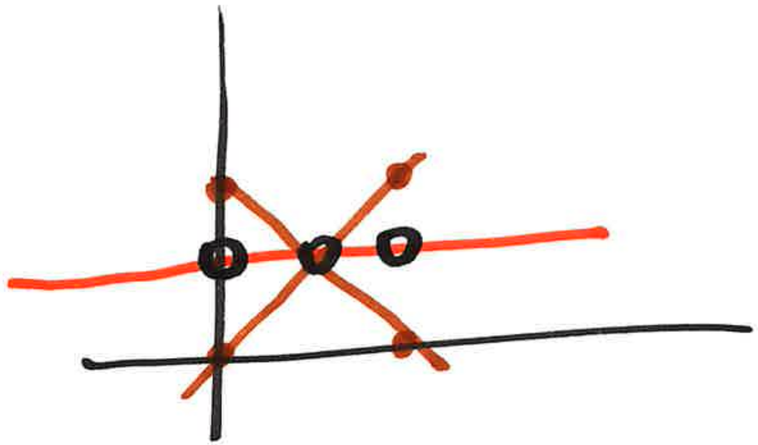


Esercizio : Siano $P_0 = (0\ 0)$, $P_2 = (1, 0)$

$P_1 = (0\ 1)$ $P_3 = (1\ 1)$

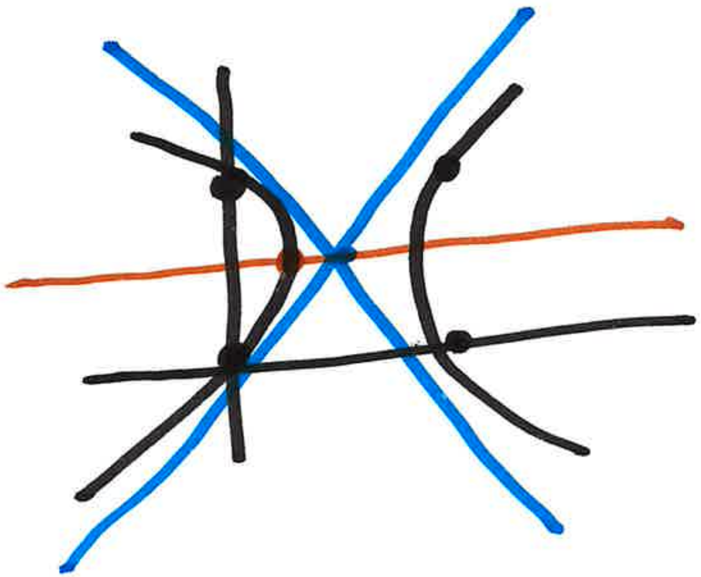
e si consideri la retta r: $y = \frac{1}{2}$

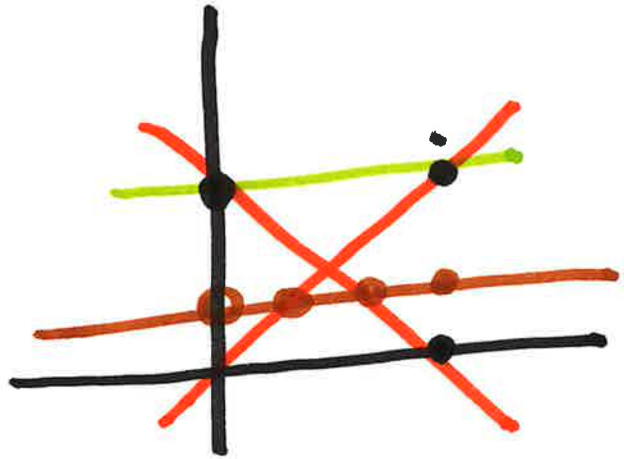
per quali punti $Q \in r$, la conica per $P_0 \dots P_4, Q$ é riducibile?



$(0,\frac{1}{2}),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$(1,\frac{1}{2})$





$y=\frac{1}{3}$

Quadriche $\Rightarrow$ sup. algebriche del II ordine.
reali.

$\Rightarrow$ polinomio omogeneo di II grado in $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$

$$F(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$$

$\Rightarrow$ matrice simmetrica associata ad una quadrica

$$^{T}X \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} X = 0$$

$$F(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + \dots$$

→ Ad ogni quadrica è associata una forma bilineare e simmetrica.

- Se $\det(A) = 0 \Rightarrow \exists$ punti doppi perché i pti doppi di una quadrica sono esattamente quelli le cui coord. omogenee sono in $\mathrm{Ker}(A)$.

- Se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ la quadrica è generale ($\Leftrightarrow$ priva di punti doppi).

→ Se si è su $\mathbb{C}$ → si può prendere come matrice A la matrice identica.

→ se si è su $\mathbb{R}$ la matrice A è def. a meno dei segni degli autovalori:

$++++$ $\quad$ $----$ $\rightsquigarrow$ forma definita pos. o definita negativa

→ NON CI SONO PTI REALI

$+++-$ $\quad$ $---+$

$++--$ $\quad$ $--++$

La quadrica contiene sott. isotropi di dim. vettoriale al più 1

(0011)

→ è detta <u>ellittica</u>

La quadrica contiene sottospazi isotropi di dim vett. 2 ⇒ rette.

$(1010), (0101)$

è detta <u>iperbolica</u>

classificazione affine.

→ si interseca con $x_4=0$ → A^* minore 3×3.

$+++$ $\quad ---$ → non ci sono pti reali all'infinito

→ $\mathcal{C}_\infty = Q \cap x_4=0$ é una conica irriducibile priva di punti reali

→ ELLISSOIDE

$+--$ $\quad -++$ → $\mathcal{C}_\infty$ é una conica irrid. a punti reali

→ IPERBOLOIDÉ.

$++0$ $\quad +--0$

$+-0$ $\quad -+0$ → $\mathcal{C}_\infty$ è una conica irriducibile

⇒ PARABOLOIDÉ.

punti iperbolici

punti ellittici