Coniche

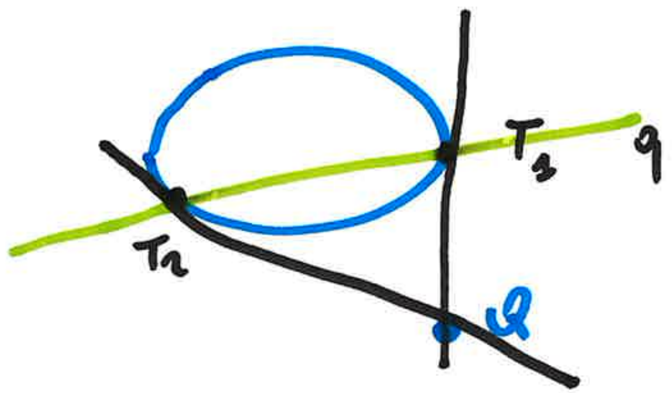
$\mathcal{C} \to a_{11}x_1^2 + \dots + a_{33}x_3^2 = 0 \quad \to A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$

→ prodotto scalare ${}^{\circ}A$ ${}^{\circ}e$

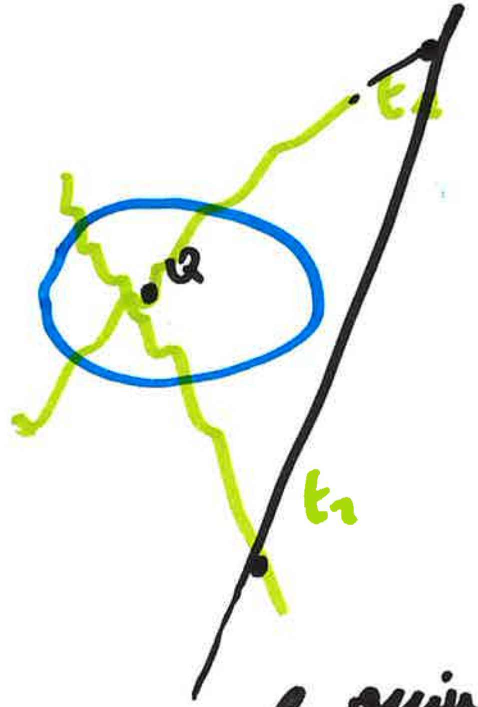
→ ortogonalità.

due punti P, Q sono detti coniugati rispetto a $\mathcal{C} \iff {}^{T}XAY = 0$ ove X, Y sono i vettori delle loro coordinate.

$\mathcal{C}$ conica irriducibile a punti reali.



$T_2^{\perp} = t_2$



la retta polare è comunque una retta reale in quanto le 2 rette tg. per Q alla conica in questo caso sono immaginarie e coniugate e quindi intersecano la conica in 2 punti a loro volta immaginari e coniugate $\Rightarrow$ la retta per questi 2 punti è reale.

→ Q è <u>esterno</u> alla conica se la sua polare interseca $\mathcal{C}$ in 2 punti reali (e distinti)

→ Q è <u>sulla conica</u> se la sua retta polare interseca la conica solo in Q (2 volte).

→ Q è <u>interno</u> la conica se la sua polare interseca $\mathcal{C}$ in 2 punti imm. e coniugati.

Conica irriducibile:

- **Ellisse** se ha 2 punti imm. coniugati all'infinito $\begin{smallmatrix} + + \\ - - \end{smallmatrix}$
  $\det(A^*) > 0$
- **parabola** se ha 1 punto reale (contato 2 volte) all'infinito $+0/-0$
  $\det(A^*) = 0$
- **iperbole** se ha 2 punti reali e distinti all'infinito. $+-$
  $\det(A^*) < 0$

Def: Sia $\mathcal{C}$ una conica irriducibile.

1) Si dice **CENTRO** di $\mathcal{C}$ il polo della retta impropria $[x_3 = 0]$
2) Una conica $\mathcal{C}$ è detta **A CENTRO** se il suo centro è un punto proprio ($\Rightarrow \mathcal{C}$ è ELLISSE o IPERBOLE).
3) Si dice **DIAMETRO** di $\mathcal{C}$ la polare di ogni punto improprio.

[i diametri di $\mathcal{C}$ sono un fascio di rette per il suo centro]

4) Si dice **ASSE** di $\mathcal{C}$ un diametro di $\mathcal{C}$ ortogonale al proprio polo.

[⚠ il polo di un diametro rappresenta una direzione; quindi ha senso dire che una retta è ortogonale ad esso]

5) Si dice **ASINTOTO** di $\mathcal{C}$ una retta propria tangente a $\mathcal{C}$ in un suo punto improprio.

[parabole → NON HANNO ASINTOTI
iperboli → HANNO 2 ASINTOTI REALI E DISTINTI
ellissi → HANNO 2 ASINTOTI IMM. E CONIUGATI]

[GLI ASINTOTI SONO RETTE CHE, quando esistono, CONGIUNGONO IL CENTRO DELLA CONICA CON I SUOI PUNTI IMPROPRI → si intersecano nel centro]

6) Si dicono **FUOCHI** le intersezioni delle rette proprie tangenti alla conica $\mathcal{C}$ per i punti $J_\infty = [(1, i, 0)]$ e $\bar{J}_\infty = [(1, -i, 0)]$

→ in generale una conica ha

1 fuoco se è una parabola

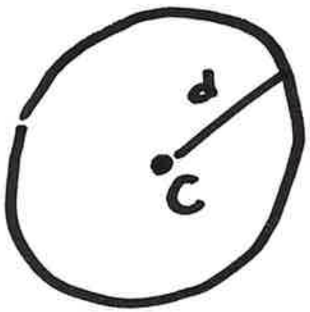
2 fuochi reali e 2 fuochi imm. e coniugati se è una ellisse (ma non una ~~circo~~ circonferenza) o una iperbole

1 unico fuoco che coincide con il centro se essa è una circonferenza.

7) Una conica è detta circonferenza (generalizzata) se essa passa per J_∞ e $\bar{J}_\infty$. I punti J_∞ e $\bar{J}_\infty$ sono detti punti ciclici.

CIRCONFERENZE

7) Sia $C=(x_c, y_c)$ un punto e $d \in \mathbb{R}$.



$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=d^2$$

$$\downarrow$$

$$(x_1-x_c x_3)^2+(x_2-y_c x_3)^2=d^2 x_3^2$$

Intersezione con $[x_3=0]$

$$x_1^2+x_2^2=0$$

$$\Rightarrow J_\infty=[(1,i,0)] \quad \bar{J}_\infty=[(1,-i,0)]$$

Sia $\mathcal{C}$ una conica per J_∞ (e $\bar{J}_\infty$)

$\Rightarrow$ sostituendo nell'eq. della stessa abbiamo $x_3=0$

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0$$

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12}i - a_{22} = 0 \\ a_{11} - 2a_{12}i - a_{22} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a_{11} = a_{22} \\ a_{12} = 0 \end{matrix}$$

$$a_{11}(x^2+y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

CIRCONFERENZA GENERALIZZATA

$a_{11} = 0 \Rightarrow$ CONICA RIDUCIBILE – unione di $[x_3 = 0]$ e $[2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0]$

$a_{11} \neq 0 \Rightarrow$ dividiamo per a_{11}

$$\frac{a_{13}}{a_{11}} = \alpha \quad \frac{a_{23}}{a_{11}} = \beta \quad \frac{a_{33}}{a_{11}} = \gamma$$

$$\left[\begin{matrix} (x^2 + 2\alpha x) + \\ (y^2 + 2\beta y) + \gamma = 0 \end{matrix} \right]$$

$$(x^2+2\alpha x+\alpha^2)+(y^2+2\beta y+\beta^2)+\gamma-\alpha^2-\beta^2=0$$

$$\left[(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-\gamma\right]$$

Eq. circonferenza con centro $(-\alpha,-\beta)$ e "raggio" $\alpha^2+\beta^2-\gamma$

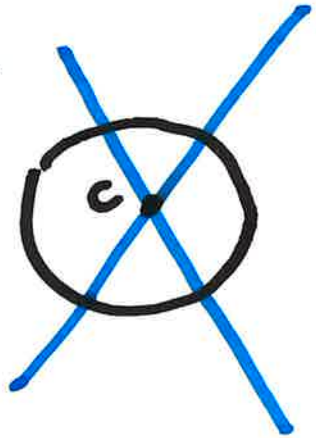
$\alpha^2+\beta^2-\gamma>0 \rightarrow \infty$ punti reali

$\alpha^2+\beta^2-\gamma=0 \rightarrow$ riducibile in 2 rette per C (imm. e coniugate)

$\alpha^2+\beta^2-\gamma<0 \rightarrow$ priva di punti reali.

__OSS__: Sia $\mathcal{C}$ una circonferenza generalizzata (non sing.).

$\Rightarrow$ ogni diametro di $\mathcal{C}$ è anche un asse di $\mathcal{C}$.



come calcolare il centro di una conica. $\rightarrow$ polo retta impropria $\rightarrow$ intersezione polari di 2 punti impropri.

$$[(1\ 0\ 0)]A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow [a_{11}\ a_{12}\ a_{13}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$[(0\ 1\ 0)]\, A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [a_{12}\ a_{22}\ a_{23}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

è circonferenza

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{13} = 0 \\ a_{11} y + a_{23} = 0 \end{cases} \qquad x = \cancel{}\ -\frac{a_{13}}{a_{11}} \qquad y = \frac{-a_{23}}{a_{11}} \qquad a_{11} = 1$$

$$r: \ \alpha\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right) + \beta\left(y + \frac{a_{23}}{a_{11}}\right) = 0$$

punto improprio è $[(-\beta, \alpha, 0)]$

D'altro canto la polare del punto

$$[(\alpha \;\; \beta \;\; 0)]$$ rispetto a $\mathcal{C}$

è esattamente la retta data

$$(\alpha \;\; \beta \;\; 0)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \cancel{\alpha a_{11} + \beta a_{11} + \alpha a_{13} +} \; \beta$$

$$= \left[\alpha a_{11} \;\; \beta a_{11} \;\; \alpha a_{13} + \beta a_{23}\right] \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \alpha (a_{11} x_1) + \beta a_{11} x_2 + (\alpha a_{13} + \beta a_{23}) x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right) + \beta\left(y + \frac{a_{23}}{a_{11}}\right) = 0$$

la polare del punto $[(\alpha,\beta,0)]$ rispetto $\mathcal{C}$

é una retta di punto improprio $[(-\beta,\alpha,0)]$

$\Rightarrow$ essa è ortogonale al suo polo perché

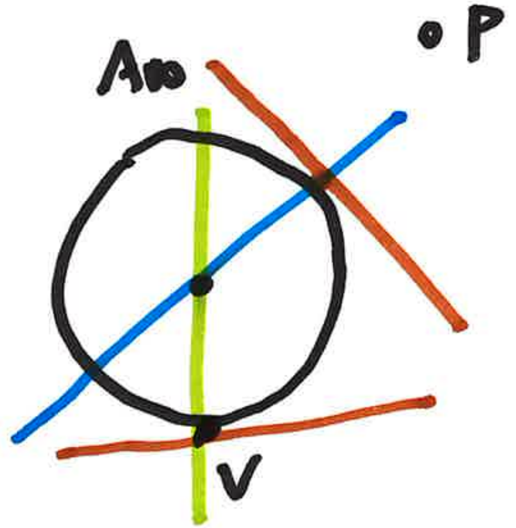
$$(\alpha \;\; \beta \;\; 0)\cdot(-\beta \;\; \alpha \;\; 0) = -\alpha\beta+\alpha\beta = 0$$

$\Rightarrow$ é un asse.

<u>Def</u>: Si dicono vertici di una conica $\mathcal{C}$ le sue intersezioni (proprie) con gli assi.

$\rightarrow$ OGNI PUNTO DI UNA CIRCONFERENZA È UN VERTICE.

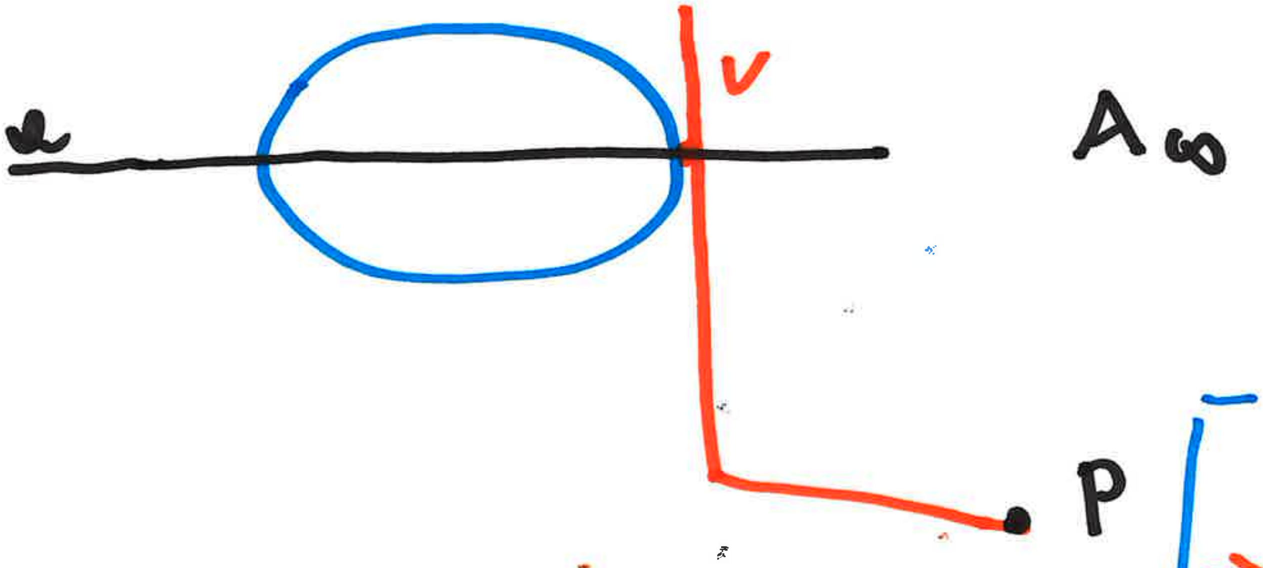
→ <u>oss</u>: In un vertice la tg. alla conica è ortogonale all'asse (diametro) passante per esso



Sia V un vertice ⇒ V appartiene ad un $asse^a$ di punto improprio A_∞ e polo P.
la tg. a $\mathcal{C}$ in V è la polare di V ⇒ essa passa per il polo dell'asse visto che $V \in a$

→ ma il polo di a è P ed è un pto improprio $\perp a$

$\Rightarrow$ la tg. a $\mathcal{C}$ in V é ortogonale ad a.



$P = a^{\perp_{\mathcal{C}}}$

$V \in a = P^{\perp}$

$\Rightarrow P \in V^{\perp}$

ma $V^{\perp} =$ tg a $\mathcal{C}$ in V e P punto improprio $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ tg a $\mathcal{C}$ in V è ortogonale ad a.

Teorema: Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro che non è una circonferenza (generalizzata). Allora $\mathcal{C}$ ha esattamente 2 assi e questi assi sono ortogonali fra loro.

DIM:

$$\begin{cases} [(\ell, m, 0)] A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{(eq dei diametri)}$$

$$\begin{cases} (\ell \;\; m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{\ell(a_{11})x_1+} \begin{cases} [(\ell a_{11} + m a_{12}) \;\; (\ell a_{12} + m a_{22})] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la polare del punto $[(l \; m \; 0)]$

ha punto improprio $[(-la_{12}-ma_{22} \;\; la_{11}+ma_{12} \;\; 0)]$

In che caso sono ortogonali $\Leftrightarrow$ il prod. scalare

$$(l \quad m \quad 0) \cdot (-la_{12}-ma_{22} \;\; la_{11}+ma_{12},0) = 0$$

o, in altrenativa, tenuto conto che la dir. ortogonale alla retta di eq. $(\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3)=0$

é data dal vettore (α, β)

quando $(l \; m \; 0)$ è proporzionale a

$$(la_{11}+ma_{12},\; la_{12}+ma_{22},0).$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \ell a_{11}+m a_{12} & \ell a_{12}+m a_{22} \\ \ell & m \end{vmatrix} = 0$$

$$\ell m\, a_{11} + m^2 a_{12} - \ell^2 a_{12} - \ell m\, a_{22} = 0$$

$$\ell m\,(a_{11} - a_{22}) + (m^2 - \ell^2) a_{12} = 0$$

DA RISOLVERE IN (ℓ, m).

Tutto $=0$ NON PUÓ essere

$a_{11} = a_{22}$ ~~ss~~ $\Rightarrow (m^2 - \ell^2) a_{12} = 0$ $\quad (1,1)$, $(1,-1)$ $\rightarrow$ e sono 2 ortogonali

supponiamo $a_{11} \neq a_{22}$ se $m=0$ é soluzione $\Rightarrow$

$a_{12} = 0 \Rightarrow \ell = 0$ è soluzione 2 sol. $\rightarrow$ ortog.

$(1,0)$, $(0,1)$

supponiamo $m = 0$ non sia soluzione $\Rightarrow$ dividiamo per m^2

$$\xi(a_{11}-a_{22}) + a_{12} - \xi^2 a_{12} = 0 \qquad \xi = \frac{l}{m}$$

dividiamo ~~poco~~ per $-a_{12} \neq 0$

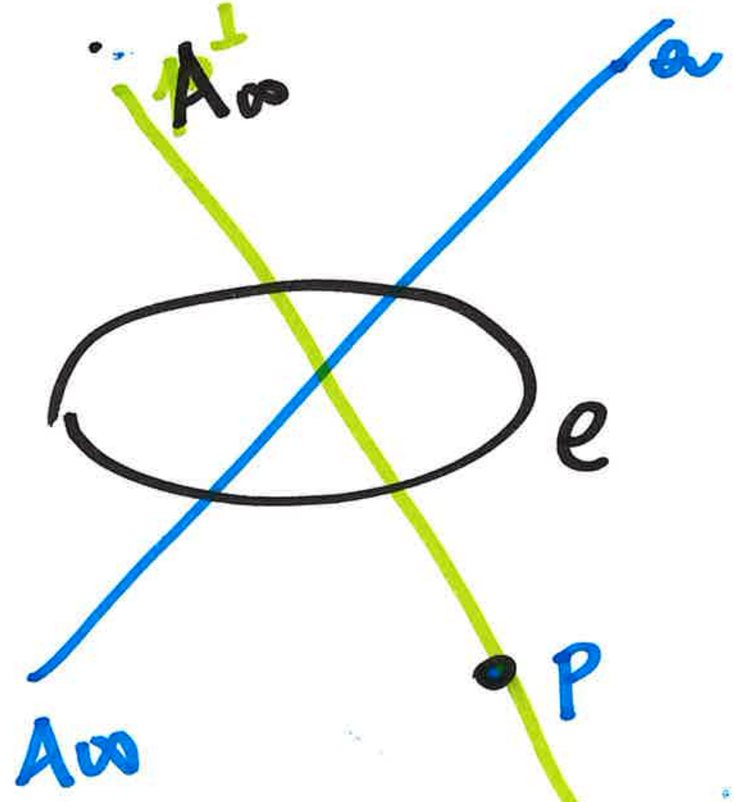
$$\Delta = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0$$

$\neq a_{11}$ in quanto non abbiamo una circ. generalizzata.

$\Rightarrow$ si hanno 2 soluzioni.

$$\xi^2 - \xi(a_{11}-a_{22}) - 1 = 0$$ e quindi $\xi \neq 0$ sol. $\Rightarrow -\xi^{-1}$ sol.

$$\frac{l}{m} \to -\frac{m}{l}$$ $\Rightarrow$ gli assi sono ortogonali.



a = asse

P = polo di A

(ortog. A_∞)

A_∞ = pto improprio di a

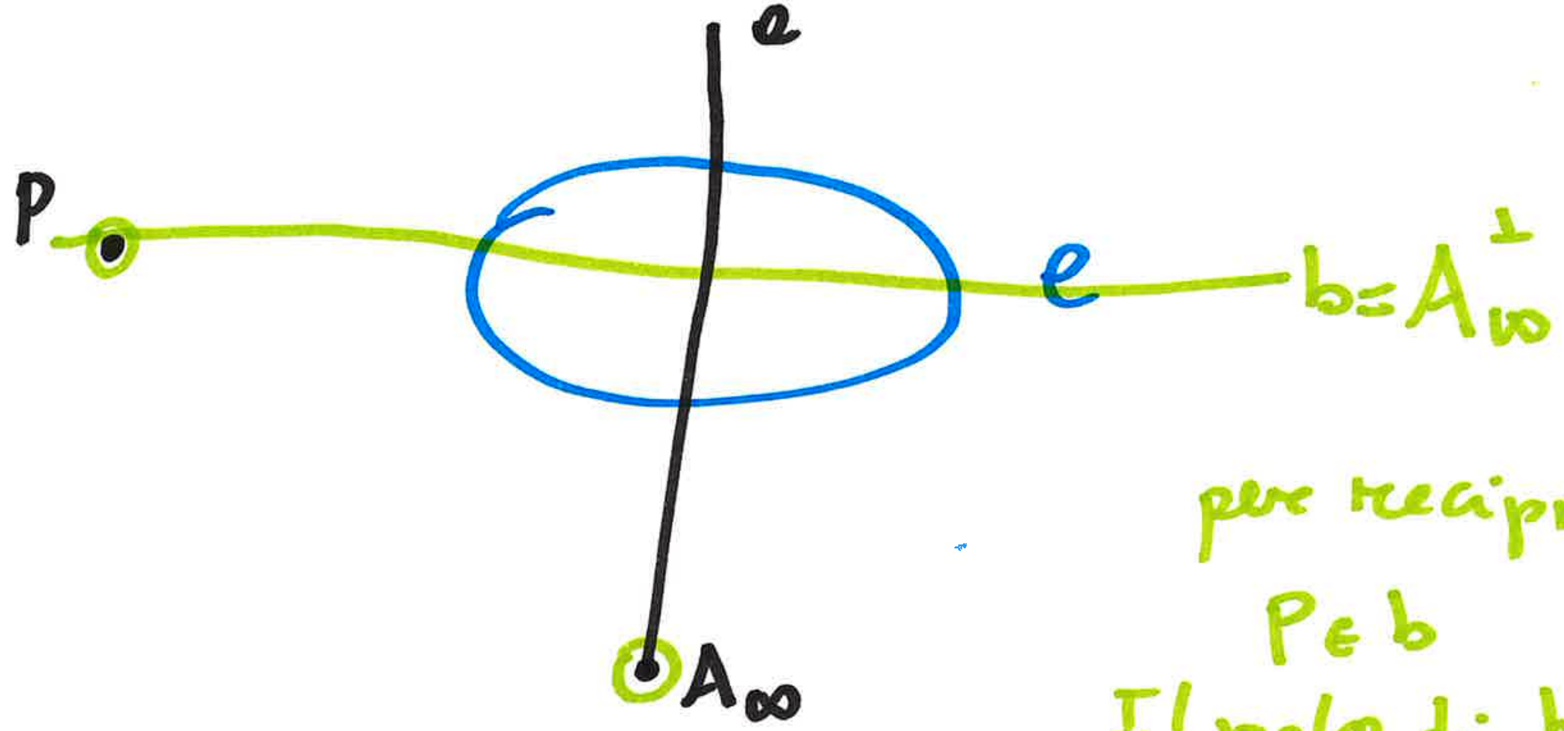
$\Rightarrow A_\infty^\perp$ é una retta che passa per il polo di A

ma il polo di A è P

$\Rightarrow A_\infty^\perp$ è una retta di direzione P

$\Rightarrow$ la direzione di $A_\infty^\perp$ è ortogonale ad $A_\infty \Rightarrow A_\infty^\perp$ é un asse.

$\Rightarrow A_\infty^\perp$ è necessariamente l'altro asse di $\mathcal{C}$.



per reciprocità

$P \in b$

Il polo di b è ortogonale a P che è la direzione di b.

$\Rightarrow$ b è un asse.

Teorema: Sia $\mathcal{C}$ una parabola $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ ha esattamente un asse.

OSS: Sia $\mathcal{C}$ una parabola $\Rightarrow$ il punto improprio di $\mathcal{C}$ si ottiene intersecando $\mathcal{C}$ con $x_3 = 0$

$$\begin{cases} [x_1, x_2]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1^2 a_{11} + 2a_{12}x_1x_2 + x_2^2 a_{22} = 0$$

$$\det A^* = 0 \Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

$$\cancel{x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}}$$

$$\xi^2 a_{11} + 2\xi a_{12} + a_{22} = 0$$

$$\xi = \frac{x_1}{x_2}$$

$$\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0$$ perché parabola.

$$\xi = \frac{-a_{12}}{a_{11}}$$

$$a_{12}^2 a_{11}^{-1} + 2(-a_{12}^2) a_{11}^{-1} + a_{22} = 0$$

$$a_{12}^2 - 2a_{12}^2 + a_{22} a_{11} = 0$$ $\underline{\underline{ok}}$

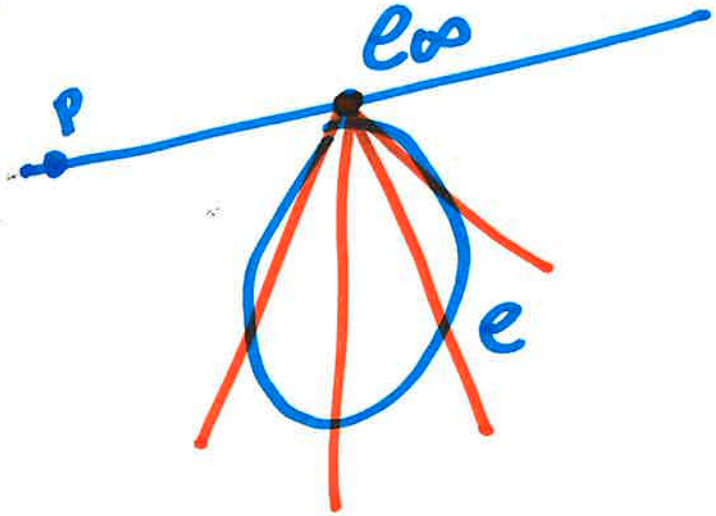
$$a_{22} a_{11} - a_{12}^2 = 0$$

$$C_\infty = [(-\frac{a_{12}}{a_{11}}, 1, 0)] = [(a_{12}, -a_{11}, 0)]$$

Fascio dei diametri:

$$a_{11} x + a_{12} y + k = 0$$

e sono tutti paralleli.



$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + k x_3 = 0$ in forma omogenea.

punto improprio di questa retta è $[(a_{12}, -a_{11}\ 0)]$

$\Rightarrow$ il polo della retta deve essere $\perp$ ad esso e quindi deve essere $[(a_{11}\ a_{12}\ 0)]$

$\Rightarrow$ ASSE = polare di $[(a_{11} \; a_{12} \; 0)]$

$$[(a_{11} \; a_{12} \; 0)] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left[(a_{11}^2 + a_{12}^2) \quad (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}) \quad (a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23})\right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

asse della parabola: $\rightarrow$ $(a_{11}^2 + a_{12}^2)x_1 + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22})x_2 + (a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23})x_3 = 0$

Forme canoniche per le coniche.

→ in che ambito si lavora?

A) Proiettivo: una trasformazione che mantiene l'incidenza e manda dunque punti in punti e rette in rette è descritta a meno di coeff. di proporzionalità da una matrice $M \in GL(3, \mathbb{R})$ più (eventualmente) il coniugio complesso (che comunque fissa i pti reali).

$\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ (le trasf. ammissibili sono tutte e sole le trasf. lineari invertibili).

ℓ conica generale

$\downarrow$

$\alpha x_2^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 0$ $\qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \{-1, 0, +1\}$.

B) <u>Affine</u>: ci servono trasformazioni proiettive che mandino la retta impropria in sé stessa. $\qquad x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_{31} x_1 + b_{32} x_2 = 0 \quad \forall \, (x_1, x_2) \neq (0,0)$$

$$\Rightarrow b_{31} = b_{32} = 0$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} =$$

In coord. non omogenee si vede che le trasformazioni affini del piano sono tutte composizioni di

A) TRASFORMAZIONI LINEARI INVERTIBILI DEL TIPO $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0\,0 & 1 \end{bmatrix}$

$$X \to AX \qquad A \in GL(2, \mathbb{R})$$

B) TRASLAZIONI: $\quad X \to X + T \qquad T \in \mathbb{R}^2$

corrispondono a $\begin{bmatrix} I & \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \\ 0\;0 & 1 \end{bmatrix}$

Ellissi $\longrightarrow$ $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=-1$

Iperboli $\to$ $x^2-y^2=1$

Parabole $\to$ $y=x^2$

c) <u>Euclideo</u> : le trasformazioni ammissibili sono le isometrie del piano

↓

Trasform. che preservano le distanze (ed anche il prod. scalare).

→ composizioni di trasformazioni del tipo $y = AX + T$

con A matrice ortogonale

e T vettore di traslazione.

se $\det A = +1$ → trasformazioni dirette preservano orientamento

$\det A = -1$ → scambiano l'orientamento.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 

→ **CARATTERIZZAZIONE METRICA**

- Si scelgono riferimenti opportuni e si guarda che cosa si ottiene come equazione.

A) Coniche a centro.

→ ORIGINE DEL RIFERIMENTO → centro della conica.

→ BASE DEL RIFERIMENTO
- circ. ⇒ 2 diametri ortogonali
- ≠ circ. ⇒ 2 assi.

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

$$(1\,0\,0)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$[a_{11}\ a_{12}\ a_{13}]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a_{13} = 0$$

$$(0\,1\,0)A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a_{23} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$x=0$, $y=0$ due <u>assi</u>

$$[1\,0\,0]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow a_{12} = 0$

$\Rightarrow$ l'equazione ha forma $\qquad a_{33} \neq 0$

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} = 0$$

DIVIDIAMO PER $-a_{33}$

$$\underbrace{\frac{a_{11}}{a_{33}} x^2 + \frac{a_{22}}{a_{33}} y^2 = \cancel{-a_{33}}\ 1}$$

osserviamo che se

$\frac{a_{11}}{a_{33}}$	e $\frac{a_{22}}{a_{33}}$	
+	+	$\Rightarrow$ ellisse ~~ideal. priva di pti propri~~
−	−	$\Rightarrow$ ~~ellisse~~ senza pti
+	−	$\rightarrow$ iperbole
−	+	$\rightarrow$ iperbole

poniamo

$$a^2 = \left|\frac{a_{33}}{a_{11}}\right| \qquad b^2 = \left|\frac{a_{33}}{a_{22}}\right|$$

ellisse a pt. reali $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ellisse senza pt. reali $\quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}\right] \text{iperboli}$$

OSSERVAZIONE: Gli assi di una conica sono assi di simmetria.

$\sigma_x: \quad (x,y) \to (x,-y)$

$\sigma_y: \quad (x,y) \to (-x,y)$

le coniche (a centro) sono simmetriche
rispetto i loro assi.