Coniche.

Conica: curva algebrica reale piana del II ordine.

$V(f)$ con f polinomio non costante

il polinomio f ha coeff. in $\mathbb{R}$

$n=2$, $A_6(2,\mathbb{R})$

$\deg f = 2$

Una conica è riducibile $\iff$ essa ha un punto doppio ed in tale caso essa si spezza nell'unione di 2 rette (NON NEC. DISTINTE).

$$\mathcal{C}: a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad {}^{T}XAX = 0$$

A reale e simmetrica.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

In generale la matrice A è definita a meno di un coeff. di proporzionalità non nullo.

「Ad una conica $\mathcal{C}$ è associato un prodotto scalare ed i punti isotropi per tale prod. scalare sono i punti della conica.」

Un punto P di coordinate $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ è doppio per una conica $\mathcal{C} \iff AX = \underline{0}$ cioè $P \in \operatorname{Ker}(A)$.

In particolare $\mathcal{C}$ è singolare (= ha almeno un punto doppio) e quindi riducibile (= è unione di 2 curve di grado più basso = rette) $\iff \det A = 0$ $\iff$ ~~Spe~~ $0 \in \operatorname{Spec}(A)$ (0 è autovalore di A).

A reale e simmetrica $\to$ A è diagonalizzabile per il teorema spettrale $\Rightarrow$ esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto cui l'equazione ${}^{T}X A X = 0$

si può riscrivere come

$$ {}^{T}X' D X' = 0 $$

con $D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \alpha_3 \end{bmatrix}$ matrice diagonale

che contiene sulla diag. gli autovalori di A

$$ \alpha_1 x_1'^2 + \alpha_2 x_2'^2 + \alpha_3 x_3'^2 = 0 $$

osserviamo che possiamo nuovamente cambiare base sostituendo ad $x_i'' = x_i'$ se $\alpha_i = 0$

$\cancel{x_i'' = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} x_i' \text{ se } \alpha_i \neq 0}$

$x_i'' = \sqrt{|\alpha_i|}\, x_i'$ se $\alpha_i \neq 0$

Scritti rispetto le nuove coordinate otteniamo come eq.

$$\varepsilon_1 x_1''^2 + \varepsilon_2 x_2''^2 + \varepsilon_3 x_3''^2 = 0$$

con $\varepsilon_i \in \{-1, 1, 0\}$.

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (+\,+\,+)$ oppure $(-\,-\,-)$

$\Rightarrow$ il prod. scalare è def. positivo

$\Rightarrow$ NON ci sono VETTORI ISOTROPI

$\Rightarrow$ la conica $\mathcal{C}$ è irriducibile a punti immaginari (priva di punti reali).

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (+ + -), (- - +)$

conica irriducibile a punti reali.

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (+ + 0), (- - 0)$

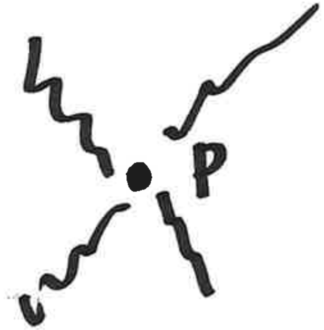
$(+ - 0), (- + 0)$

$(+ 0 0), (- 0 0)$

coniche riducibili.

$(+ + 0)$ $\quad x_1^2 + x_2^2 = 0 \quad (x_1 + i x_2)(x_1 - i x_2) = 0$

→ la conica si spezza in 2 rette immaginarie e coniugate



→ osserviamo che nel sott. $x_3 = 0$ abbiamo un prodotto scalare di tipo $(++)$ o $(--)$ e quindi definito pos. o neg.

→ comunque privo di punti isotropi

$(+ - 0)$: $\quad x_1^2 - x_2^2 = 0 \quad (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$

la conica si spezza in 2 rette reali e distinte

[in $x_3 = 0$ la segnatura è $(+-)$ e quindi ci sono due punti reali e distinti].

$(+\,0\,0)$: $\dim \operatorname{Ker}(A) = 2 \Rightarrow$ esiste una retta di punti doppi e nessun punto della conica può essere fuori da tale retta.

$$X_1^2 = 0$$

osserviamo che su $x_3 = 0$ la reg. è $(+, 0)$ e quindi c'è esattamente 1 punto all'infinito contato 2 volte

$\mathcal{C}$ conica ; A matrice della conica

	segni autovalori di A	
singolare	$+\,0\,0 \;/\; -\,0\,0$	retta reale contata 2 volte
singolare	$+\,-\,0 \;/\; -\,+\,0$	2 rette reali e distinte
singolare	$+\,+\,0 \;/\; -\,-\,0$	2 rette imm. e coniugate
	$+\,+\,- \;/\; -\,-\,+$	conica irrid. a punti reali
	$+\,+\,+ \;/\; -\,-\,-$	conica irrid. priva di punti reali.

Teorema: tutte le coniche irriducibili a punti reali sono proiettivamente equivalenti.

CLASSIFICAZIONE <u>AFFINE</u> DELLE CONICHE.

$\downarrow$

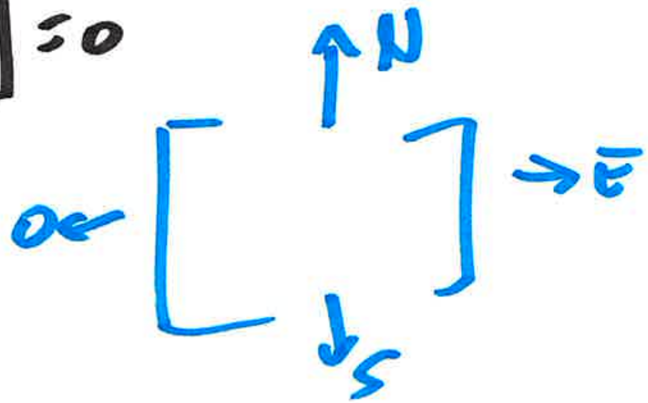
classificando come intersecano la retta dei punti che NON sono affini.

Sia $\mathcal{C}$ una conica irriducibile di matrice A.

Studiamo $\mathcal{C} \cap [x_3 = 0]$

$$\begin{cases} [x_1\ x_2\ x_3]\, A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$



$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$$

se A^* ha autovalori $(+\ +)$ $(-\ -)$ $\Rightarrow$ NON ci sono PUNTI IMPROPRI REALI.

$\Rightarrow$ 2 pti imm. coniug.

$(+\ -)$ $(-\ +)$ $\Rightarrow$ ci sono 2 punti reali e distinti.

$x_1^2-x_2^2=0$

$(+\ 0)$ $(-\ 0)$ $\Rightarrow \exists!$ punto reale improprio doppio

$rk(A^*)\geq 1 \rightarrow (0\ 0)$ come autovalori non è possibile.

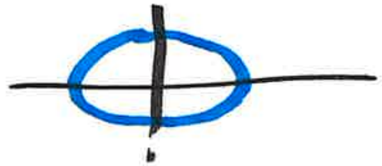
A^* é minore di A con $rk(A)=3$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array}\right]$$

$$rk(A^*)\geq rk(A)-2$$

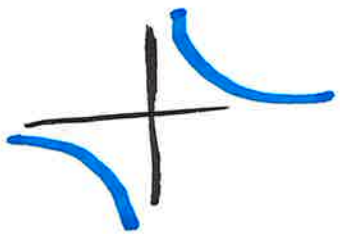
Def: Sia $\mathcal{C}$ una conica generale.
Allora $\mathcal{C}$ è detta

1) **Ellisse** se $\mathcal{C}$ ha 2 punti impropri imm. e coniugati



$(++)\,/\,(--)$

2) **Iperbole** se $\mathcal{C}$ ha 2 punti impropri reali e distinti



$(+-)\,/\,(-+)$

3) **Parabola** se $\mathcal{C}$ ha 1 punto improprio reale contato 2 volte $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ è tg. la retta impropria $\Rightarrow$ $(+\ 0)\,/\,(0\ -)$.

Una ellisse che passa per i punti impropri $J_\infty = [(1, i, 0)]$ $\bar{J}_\infty = [(1, -i, 0)]$ è detta <u>circonferenza</u>.

polarità rispetto una conica.

$\mathcal{C}: {}^T X A X = 0$

Siano $P = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X$ e $Q = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Y$

due punti. Si dice che P e Q sono <u>coniugati rispetto a $\mathcal{C}$</u> $\iff {}^T Y A X = 0$

- in altre parole P è coniugato rispetto a Q se $P \perp_A Q$ rispetto il prodotto scalare indotto dalla matrice A.

- Un punto è detto <u>autoconiugato</u> se esso è coniugato a se stesso; $P \perp_A P \iff P \in \mathscr{C}$

I punti di $\mathscr{C}$ sono tutti e soli i punti autoconiugati rispetto a $\mathscr{C}$.

→ ci occuperemo solamente del caso in cui $\det(A) \neq 0$.

__oss__: 1) $P \perp_A Q \iff Q \perp_A P$ perché il coniugio è simmetrico in quanto il prod. scalare è simmetrico.

2) $P^{\perp_A} = \{ Q : {}^t Y A X_P = 0 \}$ ove $X_P = \begin{bmatrix} x_{1P} \\ x_{2P} \\ x_{3P} \end{bmatrix}$ coordinate di P

é una retta → __retta polare__ di P

$p = P^{\perp_A}$

$\dim \langle P \rangle = 1 \Rightarrow \dim P^{\perp_A} = 2$ retta proiettiva

3) $P^{\perp_A \perp_A} = P$. In particolare sia ℓ una retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \Rightarrow \ell^{\perp_A}$ è un punto e tale punto è detto polo di ℓ.

$\perp_A$: scambia punti e rette di $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$

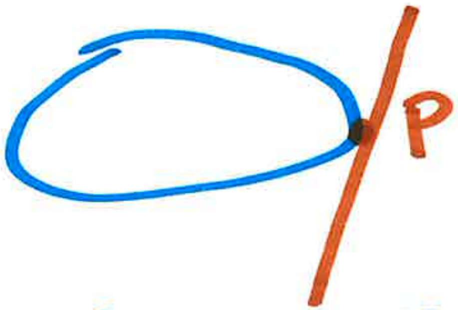
manda punti $P \rightarrow$ retta polare $P^{\perp_A} = p$.

rette $\ell \longrightarrow$ polo di ℓ $\ell^{\perp_A} = L$

4) $P \in P^{\perp_A} \iff P \perp_A P \iff P \in \mathcal{C}$.

Un punto appartiene alla sua polare $\iff$ esso appartiene alla conica.

5) Sia $P \in \mathcal{C} \Rightarrow P^{\perp_A}$ è la retta tangente alla conica in P



Eq. polare in $P \in \mathcal{C}$: $\quad [x_1\ x_2\ x_3]\, A \begin{bmatrix} x_{1P} \\ x_{2P} \\ x_{3P} \end{bmatrix} = 0$

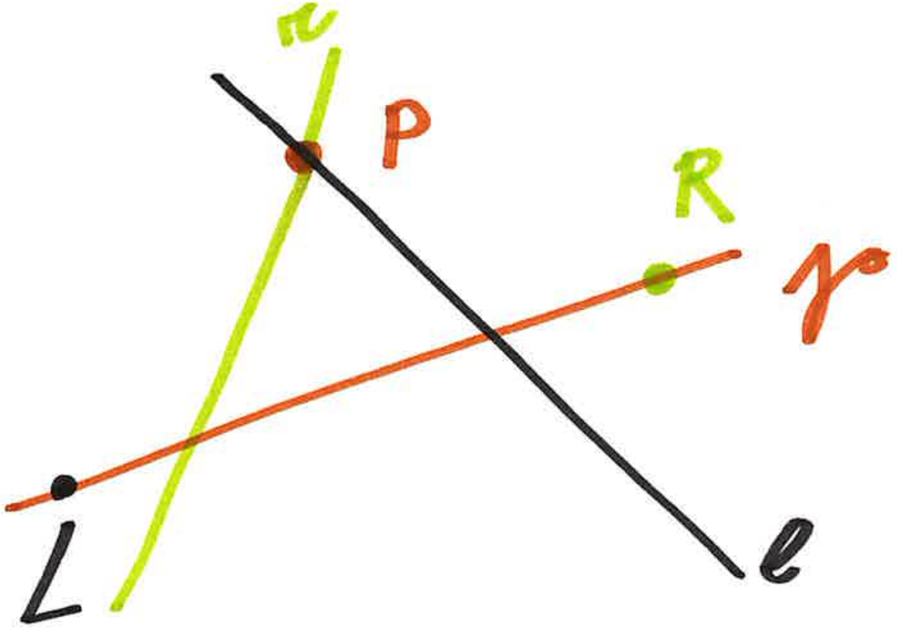
Eq. tangente in $P \in \mathcal{C}$. $(x_1\ x_2\ x_3) \cdot \nabla F|_P = 0$

$$(x_1\ x_2\ x_3) \cdot \left(A \begin{bmatrix} x_{1P} \\ x_{2P} \\ x_{3P} \end{bmatrix} \right)^T =$$

$$= [x_1\ x_2\ x_3]\, A \begin{bmatrix} x_{1P} \\ x_{2P} \\ x_{3P} \end{bmatrix} = 0$$

ALTRIMENTI (verificando a mano).

$P = \begin{bmatrix} x_{1P} \\ x_{2P} \\ x_{3P} \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ${}^T(\alpha P + \beta X)\, A\, (\alpha P + \beta X) = 0$



Sia r una retta per $P \Rightarrow P \in r$

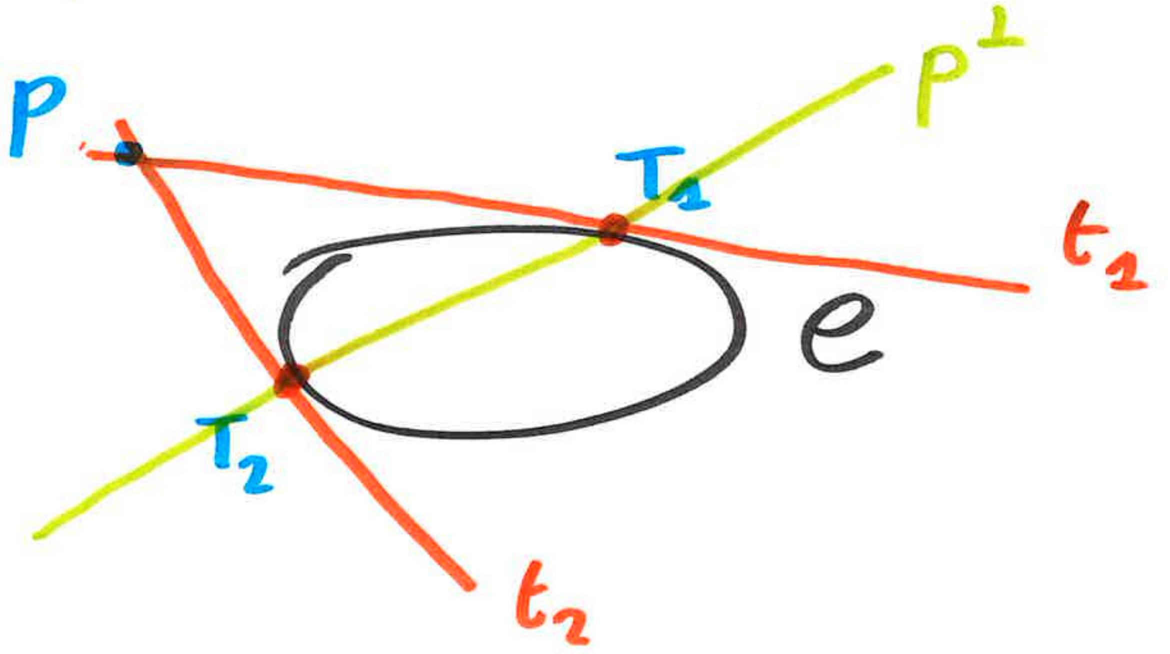
$\Rightarrow r^{\perp_A} \in P^{\perp} = p$

polo di R

Sia $L \in p = P^{\perp_A} \Rightarrow p^{\perp_A} \in L^{\perp_A} \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ P}}{P^{\perp_A \perp_A}} \in L^{\perp_A} = l$

7) Sia $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{R} \Rightarrow$ la polare di P interseca la conica $\mathcal{C}$ in 2 punti che corrispondono ai punti di tangenza delle

rette per P tangenti a $\mathcal{C}$.



- Se $P \in \mathcal{C} \Rightarrow P^{\perp_A}$ è proprio la tg a $\mathcal{C}$ in P e passa per P.

- Supponiamo $P \notin \mathcal{C}$ e siano t_1, t_2 le tg. in P alla conica T_1, T_2 i rispettivi punti di tangenza.

$\Rightarrow \quad P \in t_1 = T_1^{\perp_A} \Rightarrow T_1^{\perp_A \perp_A} \in P^{\perp} = p$

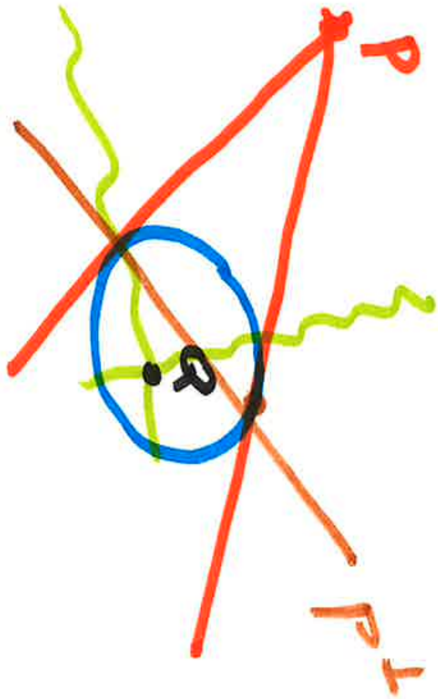
$P \in t_2 = T_2^{\perp_A} \Rightarrow T_2^{\perp\perp} \in P^{\perp} = p$

$\Rightarrow$ la polare di P passa per T_1 e T_2.

<u>N.B</u>: Non è detto che le rette t_1, t_2 siano rette reali!

Se esse sono rette reali $\Rightarrow$ il punto P è detto <u>esterno</u> alla conica.

Se esse sono rette immaginarie e coniugate $\Rightarrow P$ è detto <u>interno</u> alla conica


P
Q
P⊥

$$\alpha^2({}^T PAP) + \beta^2({}^T XAX) + 2\alpha\beta({}^T XAP) = 0$$

$P \in \mathcal{C} \Rightarrow {}^T PAP = 0$ e voglio che $\beta = 0$ $\alpha \neq 0$ sia radice doppia. $\Leftrightarrow {}^T XAP = 0$

6) PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ.

Sia $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ e $p = P^{\perp}$ la sua polare.
Allora i poli delle rette per P appartengono a p e, viceversa, le polari dei punti di p passano per P.

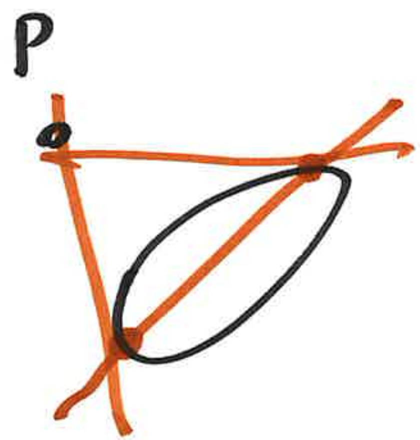
$$\alpha^2({}^t PAP) + \beta^2({}^t XAX) + 2\alpha\beta({}^t XAP) = 0 \qquad {}^t XAX = 0$$

$P \notin \mathcal{C} \Rightarrow$ divido per β^2

$$\xi^2({}^t PAP) + 2\xi({}^t XAP) + ({}^t XAX) = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \qquad ({}^t XAP)^2 - ({}^t PAP)({}^t XAX) = 0$$

Se $X \in \mathcal{C}$ → cerchiamo punti di tg. delle tg. per P



$\Rightarrow$ esso deve soddisfare $\begin{cases} {}^t XAX = 0 \\ \underline{\underline{{}^t XAP = 0}} \end{cases}$

e quindi X deve essere coniugato con P

□