<u>$n=2$</u>

AFFINE: $AG(2,\mathbb{R}) \to EG(2,\mathbb{R})$

$AG(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R}$

curva algebrica (reale) piana: insieme dei punti in $AG(2,\mathbb{R})$ ~~che~~ le cui coord. soddisfano una equazione $f(x,y)=0$ con $f \in \mathbb{R}[x,y]$.

$V(f)=\{(x,y): f(x,y)=0\}$.

curva piana $\to n=2$

algebrica $\to f \in \mathbb{K}[x,y]$

reale $\to \mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Ad una curva algebrica di $AG(2,\mathbb{R})$

$V(f)$ associamo una curva algebrica

$\tilde{V}(F)$ ove $F(x_1,x_2,x_3)$ polinomio omogeneo in 3 incognite

$$F(x_1, x_2, x_3) = X_3^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).$$

$$\tilde{V}(F) = \{[(x_1, x_2, x_3)] \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

→ Ad ogni punto di $V(f)$ di coordinate (x, y) corrisponde un punto proprio di $\tilde{V}(F)$ di coord. omogenee $[(x\ y\ 1)]$.

→ Ad ogni punto proprio di $\tilde{V}(F)$ di coord. omogenee $[(x_1\ x_2\ x_3)]$ corrisponde un punto di $V(f)$ di coord. $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$.

I punti di $\tilde{V}(F)$ di coordinate omogenee $[(x_1, x_2, 0)]$ sono detti punti impropri o punti all'infinito di $\tilde{V}(F)$. (o anche di $V(f)$).

→ Se $f(x,y) = ax+by+c \Rightarrow F(x_1, x_2, x_3) = ax_1+bx_2+cx_3$ ed il punto all'infinito di $\tilde{V}(F)$ corrisponde proprio alla direzione della retta $V(f)$.

→ Il luogo dei punti di eq. $x_3=0$ in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ è detto retta impropria (di $AG(2,\mathbb{K})$ o $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$).

→ Ogni punto improprio corrisponde alla direzione di una retta.

r: $ax+by+c=0 \rightarrow ax_1+bx_2+cx_3=0$

$\downarrow$

$[(-b, a, 0)] = r_\infty$

r ha dir.
$\mathcal{L}((-b,a))$.

CURVA ALGEBRICA DI ORDINE n

$f(x,y)=0 \qquad \deg f = n \qquad AG(2,\mathbb{R})$

→ la studiamo in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$

→ teorema dell'ordine → <u>la curva ha n punti impropri</u>

STUDIARE I PUNTI DI $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ propri/impropri
reali/immaginari.

se vogliamo studiare/classificare una curva <u>reale</u> di $AG(2,\mathbb{R})$ lavoriamo in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ e trattiamo "in modo speciale" i punti propri reali.

<u>Es.</u> $2x^2+4y^2=8$ in $AG(2,\mathbb{R})$

ci mettiamo in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ e consideriamo

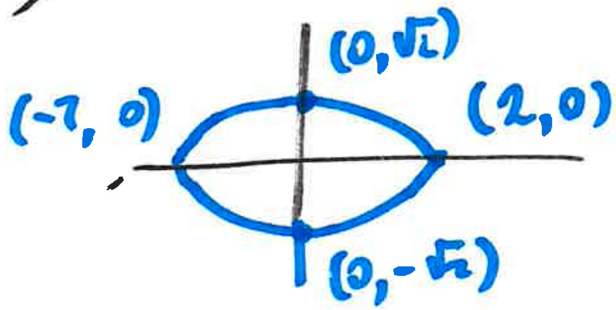
$$2x_1^2+4x_2^2-8x_3^2=0$$

1) → pti impropri → $x_3=0$ e vediamo che i pti impropri sono sol. di $\begin{cases} x_1^2+2x_2^2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$

$[(\sqrt{2}, i, 0)]$, $[(\sqrt{2}, -i, 0)]$ imm. conj.

1) → studiamo i pt. affini

la cerchi

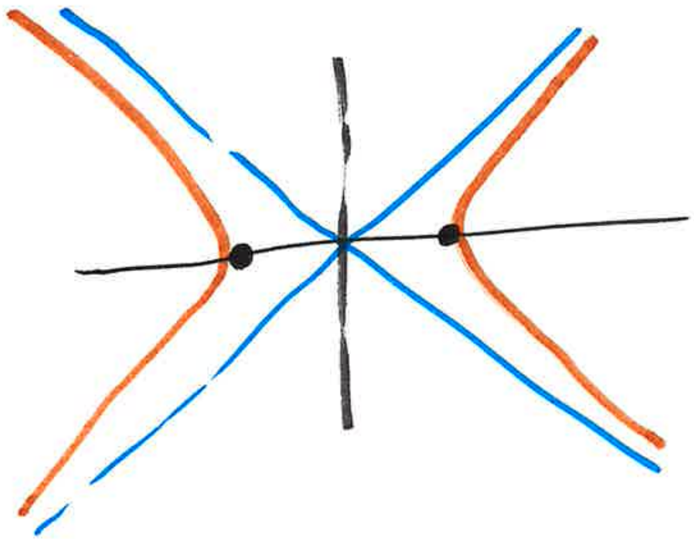


Es 1: $x^2 - y^2 = 1 \rightarrow x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$

$\nearrow$ $[(1,1,0)]$ $x - y = 0$

$\searrow$ $[(1,-1,0)]$ $x + y = 0$

IPERBOLE



3) Una curva è singolare o no.

↓

ha un punto multiplo

[punto in cui ogni retta del fascio per esso interseca almeno 2 volte.

↓

punti in cui la tangente alla curva non è ben definita.

Un punto P è multiplo per $\tilde{V}(F)$ se e soltanto se $\nabla F|_P = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\Big|_P , \frac{\partial F}{\partial x_2}\Big|_P , \frac{\partial F}{\partial x_3}\Big|_P \right) = \underline{0}$

Dato $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$, definiamo $\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{i=1}^{n} i f_i x^{i-1}$

Teorema: ξ è radice multipla di $f(x)$ $\iff$

ξ è radice sia di $f(x)$ che di $f'(x) = \frac{d}{dx} f$

se ξ radice multipla di $f(x)$ $= f(x) = (x-\xi)^2 g(x)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = 2(x-\xi) g(x) + (x-\xi)^2 \frac{d}{dx} g(x) =$$

$$= (x-\xi)\left[2g(x) + \left[\frac{d}{dx} g(x)\right](x-\xi)\right]$$

$\Rightarrow \xi$ radice di $\frac{d}{dx} f$.

Sia adesso $F(x_1\, x_2\, x_3) = 0$ l'eq. omogenea di una curva algebrica e siano $P = (x_1'\, x_2'\, x_3')$ e $Q = (x_1''\, x_2''\, x_3'')$ due punti con $P \in \tilde{V}(F)$. $\Rightarrow$ la retta PQ è tg. a $\tilde{V}(F)$ in P $\iff$ interseca $\tilde{V}(F)$ in P almeno 2 volte $\iff$

$$F(x_1' + \xi x_1'',\ x_2' + \xi x_2'',\ x_3' + \xi x_3'') = 0$$

ha $\xi=0$ come radice doppia.

$$\Rightarrow \frac{d}{d\xi} F(x_1'+\xi x_1'', x_2'+\xi x_2'', x_3'+\xi x_3'') = 0 \quad \text{per } \xi=0$$

$$\left[\nabla F \big|_{(x_1' x_2' x_3')} \cdot (x_1'', x_2'' x_3'') = 0 \right]$$

N.B. se adesso facciamo variare Q in tutti i modi possibili abbiamo proprio l'eq. della t_g in P.

__OSS 2:__ Una curva $V(f)$ è reale $\Leftrightarrow$ $V(f) = \overline{V(f)}$

$\Rightarrow$ OGNI CURVA REALE AMMETTE UNA EQ. $f(x,y)=0$ con f a coeff. reali.

$\Rightarrow$ OGNI RETTA DI $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ ammette almeno un punto reale.

$\Rightarrow$ I punti reali di $V(f)$ sono esattamente i punti $P \in V(f)$: $P = \bar{P}$.

In particolare, se $\deg f = 1$

$\Rightarrow$ ci sono 2 possibilità nel piano.

1) $f(x,y)=0$ descrive una curva reale $\Rightarrow$ retta reale.

2) $f(x,y)=0$ descrive una retta immaginaria $\Rightarrow$

$\Rightarrow V(f) \neq V(\bar{f}) \Rightarrow V(f) \cap V(\bar{f}) = \{P\}$.

P è un punto reale perché $\{\bar{P}\} = \overline{V(f) \cap V(\bar{f})} =$

$= V(\bar{f}) \cap V(f) = \{P\}$.

$\boxed{n=3}$

$$\begin{array}{ccc} \left.\begin{array}{c} AG(3,\mathbb{R}) \\ \downarrow \\ EG(3,\mathbb{R}) \end{array}\right] & \longrightarrow & \mathbb{P}^3\mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ AG(3,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^3\mathbb{C} \end{array}$$

→ Siano r, s due rette di $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$

$$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ a'x_1+b'x_2+c'x_3+d'x_4=0 \end{cases}$$

AG $\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbb{P}$

$[P;W_1]$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \tilde{\mathcal{U}}_2$

$$(x,y,z) \longrightarrow [(x,y,z,1)] = \{\alpha(x,y,z,1) \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$$

$AG(3)$

punti propri

$$\left(\frac{x_1}{x_4}\ \frac{x_2}{x_4}\ \frac{x_3}{x_4}\right) \longleftarrow [(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)] \quad x_4 \neq 0$$

$$ax+by+cz+d=0 \longrightarrow ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$$

π $\qquad$ $\tilde{V}_3$

i punti di questo piano corrispondono alle classi $[(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)]$ che risolvono l'eq.

l'insieme di tutti i punti impropri in $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$ è un <u>piano</u> di eq. $x_4=0$. I punti impropri stessi sono direzioni di <u>rette</u>!

→ ogni piano di $AG(3)$ in $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$ ha una retta impropria/all'infinito formata da tutti i suoi punti impropri

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

questa retta corrisponde alla giacitura del piano.

N.B. In $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$ due piani distinti si intersecano sempre in una retta.

se sono incidenti in $AG(3)$ → retta propria

se sono paralleli in $AG(3)$ → retta impropria all'infinito.

→ se la retta è propria ⇒ sono parte di un fascio proprio di piani.

→ se la retta è impropria ⇒ sono parte di un fascio improprio di pi...

OSS: Dati 2 piani distinti

$$\alpha: ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \qquad \beta: a'x_1+b'x_2+c'x_3+d'x_4=0$$

$$rk\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}=2$$

il generico piano del fascio per α e β ha eq.

$$\lambda(ax_1+bx_2+cx_3+dx_4)+\mu(a'x_1+b'x_2+c'x_3+d'x_4)=0$$

$$(\lambda,\mu)\neq(0,0)$$

Teorema: In $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ ogni piano contiene sempre almeno una retta reale.

DIM: Se $\pi=\overline{\pi} \Rightarrow \pi$ piano reale $\Rightarrow \pi$ contiene almeno 2 punti reali. (perché ha una eq. con coeff. in $\mathbb{R}$ risolubile) $\Rightarrow$ contiene la retta reale per quei 2 punti.

Se $\pi \neq \overline{\pi}$ $\Rightarrow$ sia $ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$

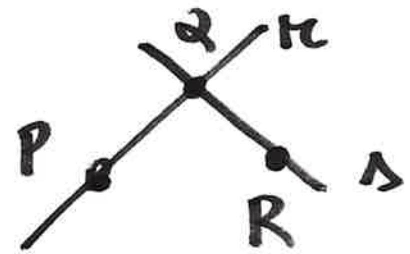
l'equazione di π.

$\Rightarrow$ $\pi \cap \overline{\pi} = \tilde{V}(ax_1+bx_2+cx_3+dx_4, \overline{a}x_1+\overline{b}x_2+\overline{c}x_3+\overline{d}x_4)$ (*)

osserviamo che $\overline{\pi \cap \overline{\pi}} = \overline{\pi} \cap \pi = \pi \cap \overline{\pi}$

e quindi è una curva reale perché le 2 eq. in (*) sono indipendenti. $\Rightarrow$ è una retta in quanto intersezione di 2 piani distinti — #

$\Rightarrow$ è una retta reale.



N.B: Se un piano contiene almeno 2 rette reali $\Rightarrow$ è reale.

$P, q \in r$, $R \in s$.

Es.: 1) dato un piano trovare le sue rette reali

2) data una retta trovare (se esiste) una sua eq. reale.

3) data una retta: trovare un pn. reale che la contenga.

1) Se π reale $\Rightarrow$ tutte le rette per 2 pt. reali di π (ci sono ∞ rette reali).

Se π non reale $\Rightarrow \pi \cap \overline{\pi}$

$\begin{cases} ix+iy+iz=0 \quad \pi \end{cases}$

$\downarrow$ reale! $\Rightarrow x+y+z=0$

$x+y+z=i \Rightarrow x_4=0$

$x_1+x_2+x_3=0$

2) $r: \begin{cases} 2x+3y+5iz=3+5i \\ 2y+2iz=3+2i \end{cases}$

consideriamo $r \cap \bar{r}$ e vediamo cosa si ottiene.

se $r \cap \bar{r} = r \Rightarrow r$ reale

$$\begin{array}{c l} \left[\begin{matrix} 2 & 3 & 5i & -3-5i \\ 0 & 2 & 2i & -3-2i \end{matrix}\right] & r \\ \left[\begin{matrix} 2 & 3 & -5i & -3+5i \\ 0 & 2 & -2i & -3+2i \end{matrix}\right] & \bar{r} \end{array}$$

$\leftarrow$ il rango della matrice può essere 2, 3 oppure 4

$\pi \cap \bar{\pi}$ $\begin{cases} x+y+z=i \\ x+y+z=-i \end{cases}$ non ha sol. in $AG(3)$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-ix_4=0 \\ x_1+x_2+x_3+ix_4=0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases}$$

retta di punti impropri.

$\underline{rk = 2} \Rightarrow r_0 = \bar{r} \Rightarrow r_0$ reale.

$rk = 3 \Rightarrow r_0 \cap \bar{r} = \{P\} \Rightarrow r$ è immaginaria di I specie.

$rk = 4 \Rightarrow r_0$ ed $\bar{r}$ sono sghembe $\Rightarrow r$ è immaginaria di II specie.

$\downarrow$

r NON HA PUNTI REALI

$\det \neq 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5i & -3-5i \\ 0 & 2 & 2i & -3-2i \\ 0 & 0 & -10i & +10i \\ 0 & 0 & -4i & +4i \end{array}\right] \Rightarrow r_0 \text{ non è una retta reale.}$$

III riga e IV riga sono proporzionali $\Rightarrow$

$\Rightarrow rk = 3 \Rightarrow r$ è di I specie. $\rightarrow$ si cerca la soluzione = unico punto reale.

16 $\begin{cases} (2+i)x+3y+5z=i \\ (2+3i)x+3y+5z=3i \end{cases}$

$\mathrm{rk}\begin{bmatrix} 2+i & 3 & 5 & i \\ 2+3i & 3 & 5 & 5i \\ 2-i & 3 & 5 & -i \\ 2-3i & 3 & 5 & -3i \end{bmatrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 2+i & 3 & 5 & i \\ 2+3i & 3 & 5 & 3i \\ 4 & 6 & 10 & 0 \\ 4 & 6 & 10 & 0 \end{bmatrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 2+i & 3 & 5 & i \\ 2+3i & 3 & 5 & 3i \\ 4 & 6 & 10 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2+i & 3 & 5 & i \\ 2+3i & 3 & 5 & 3i \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & i \\ 3i & 0 & 0 & 3i \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\mathrm{rk}=2}$

$\begin{cases} x=1 \\ 2x+3y+5z=0 \end{cases}$

$$r \begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0 \\ a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' x_4 = 0 \end{cases}$$

$$r \cap \bar{\pi} = \begin{cases} a x_1 & = 0 \\ a' x_1 \quad \cdot \quad \cdot & = 0 \\ \bar{a} x_1 + \bar{b} x_2 + \bar{c} x_3 + \bar{d} x_4 & = 0 \\ \bar{a}' x_1 + \bar{b}' x_2 + & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{bmatrix}$$

$$r \cap \bar{\pi} \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \\ \bar{a}' & b' & c' & d' \\ \bar{a}' & \bar{b}' & \bar{c}' & \bar{d}' \end{bmatrix}$$

— se 2 righe sono prop $\Rightarrow$ l'eq. del piano è uguale, parall o uguale per se a

$$\begin{bmatrix} a+\bar{a} & b+\bar{b} & c+\bar{c} & d+\bar{d} \\ i(a-\bar{a}) & i(b-\bar{b}) & i(c-\bar{c}) & i(d-\bar{d}) \\ a'+\bar{a}' & b'+\bar{b}' & c'+\bar{c}' & d'+\bar{d}' \\ i(a'-\bar{a}') & i(b'-\bar{b}') & i(c'-\bar{c}') & i(d'-\bar{d}') \end{bmatrix}$$

$\uparrow$

sistema di eq. reali!!

se esso ha

1) ∞^2 soluzioni $\Rightarrow$ r reale e 2 eq. indip danno quanto richiesto.

2) ∞^1 soluzioni $\Rightarrow$ r_0 imm. di I specie e la sol. corrisponde a $r \wedge \bar{r}$.

3) 1 soluzione $= \underline{0}$ $\Rightarrow$ r_0 imm. di II specie.

$$\pi \begin{cases} 3x + (2+i)y + 5z = 3i & (*) \\ ix + 2y = i + 6 & (\Delta) \end{cases}$$

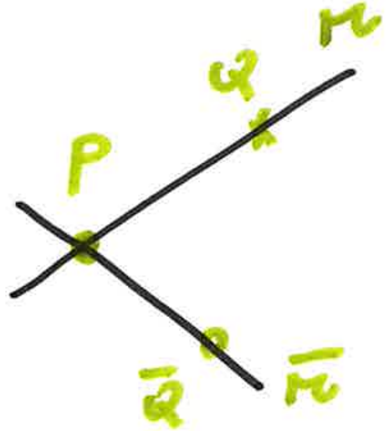
$$\pi \cap \bar{\pi} \begin{cases} 3x + 2y + 5z = 0 & \rightarrow Re(*) = 0 \\ y = 3 & \rightarrow Im(*) = 0 \\ 2y = 6 & \rightarrow Re(\Delta) = 0 \\ x = 1 & \rightarrow Im(\Delta) = 0 \end{cases}$$

studiare come sist. omogeneo.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -\frac{9}{5} \end{cases} \rightarrow \pi \cap \bar{\pi} = \left(1, 3, -\frac{9}{5}\right).$$

r retta immaginaria

- r di II specie $\Rightarrow$ non $\exists\, \pi$ piano reale che contiene r
- r di I specie $\Rightarrow$ $\exists\, \pi$ che contiene r, π reale.



r di I specie $\Rightarrow$

$\Rightarrow \pi =$ piano per $r \cap \bar{r} = P$

$Q \in r$ e $\bar{Q} \in \bar{r}$ con $Q \neq P$

Altrimenti fascio di piani per r $\rightarrow$ cerchiamo un'equazione reale.

$$r: \begin{cases} x+y+z=5 \\ 2ix+(3+i)y+7z=12i-\sqrt{2} \end{cases}$$

Coniche (e quadriche).

$n = 2$; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

F polinomio.

Def: Una conica è una curva algebrica reale piana del II ordine. $\rightarrow \deg F = 2$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad$ $n = 2$

$$\mathcal{C} = \tilde{V}(F)$$

con $F(x_1\, x_2\, x_3) \in \mathbb{R}[x_1\, x_2\, x_3]$

F omogeneo

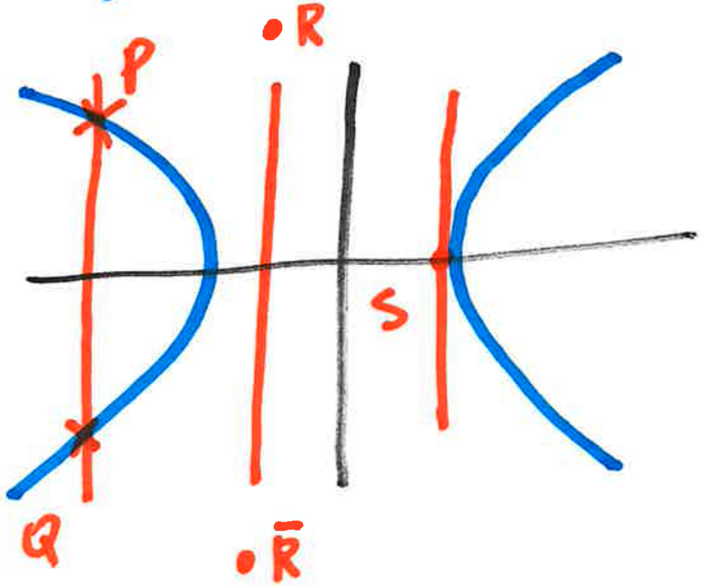
$\deg F = 2$

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

oss: 6 coeff.
$\rightarrow \exists\ \infty^5$ coniche
$\rightarrow$ che per 5 punti "generici" $\exists!$ conica.

→ ogni retta interseca una conica in 2 punti in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

- reali e distinti
- reali e coincidenti
- immaginari e coniugati.



$$q(\bar{x}) = F(x_1\ x_2\ x_3)$$

$$F(x_1\ x_2\ x_3) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrice associata alla conica $\tilde{V}(F)$ con $F(x_1\, x_2\, x_3)$ come prima.

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = (x_1\, x_2\, x_3)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

→ Associata ad ogni conica c'è una matrice reale e simmetrica

→ associata ad ogni conica c'è un prodotto scalare ed ~~e~~ i punti della conica corrispondono ai vettori isotropi per questo prodotto scalare.

$$*: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \bar{x}, \bar{y} \longrightarrow {}^T\bar{x} A \bar{y} \end{cases}$$

A matrice della conica

$$\Rightarrow \quad F(\bar{x}) = 0 \iff {}^T\bar{x} A x = 0 \iff \bar{x} * \bar{x} = 0$$

punti multipli di una conica.

$$\begin{cases} \nabla|_P F = \underline{0} \\ F(P) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3$$

$\nabla F|_P = \underline{0} \Rightarrow 2A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ se $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow (x_1\ x_2\ x_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

e quindi $F(x_1, x_2, x_3) = 0$

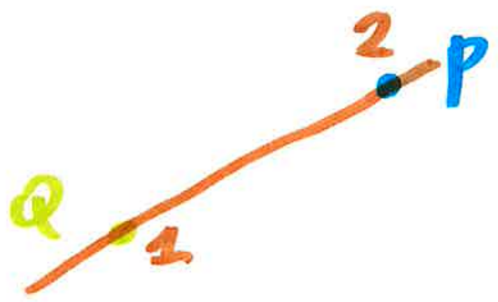
e dunque $P \in \mathcal{C} = V(F)$ e P punto multiplo

P è multiplo per $\mathcal{C} \iff$ le sue coord. omogenee sono contenute in $\operatorname{Ker}(A)$.

$\rightarrow$ Una conica $\mathcal{C}$ è <u>non</u> singolare $\iff \operatorname{Ker}(A) = \{\underline{0}\}$

$\iff \det(A) \neq 0$.

<u>OSS</u>: Una conica con un punto doppio è riducibile.



pto doppio

$Q \neq P$; $Q \in \mathcal{C}$.

$|PQ \cap \mathcal{C}| \geq 3 \Rightarrow PQ \subseteq \mathcal{C}$.

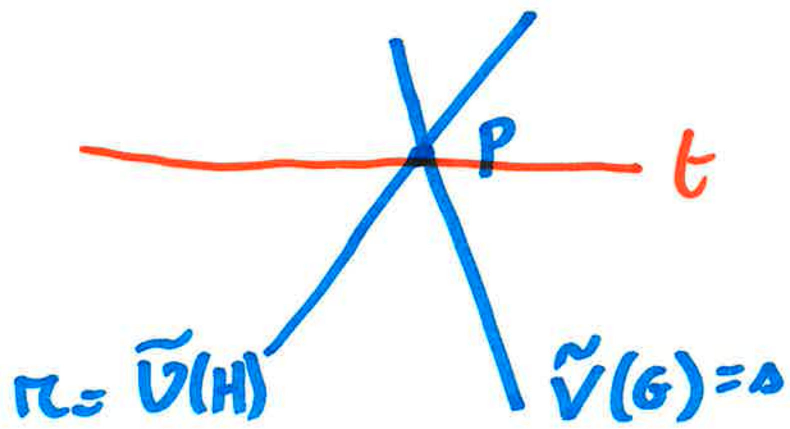
In particolare se $\det(A) = 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ ha un pto doppio

$\Rightarrow F(x_1, x_2 x_3)$ è riducibile come polinomio $\Rightarrow \exists\, G(x_1 x_2 x_3), H(x_1 x_2 x_3)$ con $\deg G = \deg H = 1$ tali che

$$F(x_1\ x_2\ x_3) = G(x_1\ x_2\ x_3) H(x_1\ x_2\ x_3).$$

viceversa: Supponiamo $F(x_1,x_2,x_3)=G(x_1,x_2,x_3)H(x_1,x_2,x_3)$

$\Rightarrow \mathcal{C}=\tilde{V}(F)$ ha un punto doppio.



Sia $P\in \tilde{V}(H)\cap\tilde{V}(G)$

e $Q\in\mathcal{C}\setminus\{P\}$.

$\Rightarrow$ la retta PQ è

la retta che congiunge

P con un punto di r

o un punto di s $\Rightarrow$ essa

è contenuta in $\mathcal{C}$.

se consideriamo una generica retta t

per P con $t\neq r,s$ essa interseca solo in P

$\Rightarrow$ poiché deve intersecare 2 volte interseca in P 2 volte $\Rightarrow$ P è doppio $\square$