Geometria Affine e Ampliata.

	dim	Affine	Ampliata	Sott. vett. di dim
punto	0	$(x_1 \dots x_n)$	$[(x_1 \dots x_n \; x_{n+1})]$	1 in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$
retta	1	$[P; W_1]$	$\tilde{W}_2$	2
piano	2	$[P; W_2]$	$\tilde{W}_3$	3
etc.				

dim geometrica

dimensione vettoriale = dim geom + 1

OSS: ogni $(1+n)$-upla non nulla in V_{n+1} corrisponde ad un punto in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$.

N.B. $(00\dots0)$ non rappresenta un punto.

retta in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ per 2 punti distinti

$$P = [(x_1' \dots x_{n+1}')] \qquad Q = [(x_1'' \dots x_{n+1}'')]$$

l'insieme di tutti i sott. 1-dim. di

$$\mathcal{L}(P, Q)$$

$$(\alpha, \beta) \neq (0\,0)$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_1'' \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_{n+1} = \alpha x_{n+1}' + \beta x_{n+1}'' \end{cases}$$

<u>N.B</u>: valori proporzionali di (α, β) danno lo stesso punto.

Teorema (dell'ordine).

Sia $F(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ un polinomio omogeneo di grado n. E sia r una retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$. Allora $|r \cap \tilde{V}(F)| = n$ oppure $r \subseteq \tilde{V}(F)$.

[Ogni retta interseca $\tilde{V}(F)$ in n punti contati con la debita molteplicità oppure $r \subseteq \tilde{V}(F)$.]

proprietà algebrica $\longleftrightarrow$ proprietà geometrica

$$\deg F = |r \cap \tilde{V}(F)|$$

<u>DIM</u>: r retta, siano P_1, P_2 due punti distinti di r

$$r \begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_1'' \\ x_2 = \alpha x_2' + \beta x_2'' \\ x_3 = \alpha x_3' + \beta x_3'' \end{cases} \qquad (\alpha,\beta) \neq (0,0).$$

x_i': coord. di P_1 ; x_i'': coord. di P_2

Consideriamo il polinomio $G(\alpha,\beta) = F(\alpha x_1' + \beta x_1'', \alpha x_2' + \beta x_2'', \alpha x_3' + \beta x_3'')$.

$$G(\alpha,\beta) = \sum_{i=0}^{n} g_i \alpha^i \beta^{n-i}$$

se $G(\alpha,\beta) \equiv 0 \Rightarrow \forall P \in r : P \in \tilde{V}(F) \Rightarrow r \subseteq \tilde{V}(F)$

supponiamo ora $G(\alpha,\beta) \not\equiv 0$.

1) $g_0 \neq 0$ $\qquad g_0\beta^n + \sum_{i=1}^{n} g_i \alpha^i \beta^{n-i} = G(\alpha,\beta)$

in questo caso $(0,1)$ non può essere soluzione di $G(\alpha,\beta)=0$

$$G(0,1) = g_0 \neq 0$$

Tutte le possibili soluzioni sono della forma (α,β) con $\alpha \neq 0$. In particolare (α,β) è soluzione di $G(\alpha,\beta)=0 \Leftrightarrow \mu = \frac{\beta}{\alpha}$ è soluzione di $g(x)=0$ con $g(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i x^{n-i}$

$$G(\alpha,\beta) = g_0\beta^n + \sum_{i=1}^{n} g_i \alpha^i \beta^{n-i}$$

divido per α^n

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha^n} G(\alpha,\beta) = \sum_{i=0}^{n} g_i \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-i} = g\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Viceversa se $g(\mu)=0 \Rightarrow (1,\mu)$ è soluzione di $G(\alpha,\beta)$

e anche $k(1,\mu)$ $k\neq 0$.

→ per il teorema fondamentale dell'algebra

$\deg g(x) = n \Rightarrow g(x)=0$ ha n radici in $\mathbb{C}$

contate con le debite molteplicità $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, n$ punti di intersezione fra r_0 e $\mathcal{C}(F)$.

2) Supponiamo ora $g_0 = g_1 = \dots = g_{t-1} = 0$ in $\underline{t-1<n}$

$g_t \neq 0$; $G(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{n} g_i \alpha^i \beta^{n-i}$

$\Rightarrow G(\alpha, \beta) = \alpha^t \boxed{\left(\sum_{i=t}^{n} g_i \alpha^{i-t} \beta^{n-i} \right)} = H(\alpha, \beta)$

OSSERVIAMO CHE 1) $(0, 1)$ è soluzione di $G(\alpha, \beta) = 0$ con molteplicità t

2) $H(\alpha, \beta)$ è un polinomio di grado $n-t$ in cui il coeff. del primo termine cioè $\alpha^0 \beta^{n-t}$ è diverso da 0

$\Rightarrow$ con lo stesso ragionamento di prima si vede che $H(\alpha, \beta)$ ha esattamente $n-t$ soluzioni del tipo $(1, \bar{\beta})$.

$\Rightarrow$ # totale soluzioni di

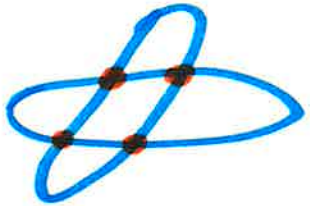
$$G(\alpha, \beta) = 0$$

(a meno di proporzionalità)

$$t + (n - t) = n$$

$\square$

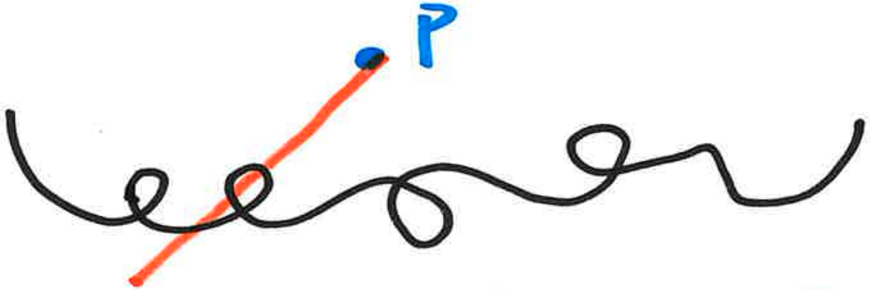
(Esiste anche un teorema più forte di questo che dice che due curve di ordine rispettivamente m ed n si intersecano sempre in $m \cdot n$ punti a patto che non abbiano componenti comuni $\rightarrow$ Teorema di Bézout).



<u>oss</u>: Sia $\tilde{V}(F)$ una curva algebrica in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

Allora $\tilde{V}(F)$ ha infiniti punti!

1) $\tilde{V}(F) \neq \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ sia ora $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \setminus \tilde{V}(F)$



osserviamo che ogni retta per P deve intersecare $\tilde{V}(F)$ in n punti ove $n = \deg F$.

D'altro canto a rette distinte per P corrispondono intersezioni distinte (altrimenti per P e l'int. passa una ed una retta) $\Rightarrow$ $|\tilde{V}(F)| \geq |\mathbb{R}| = \infty$.

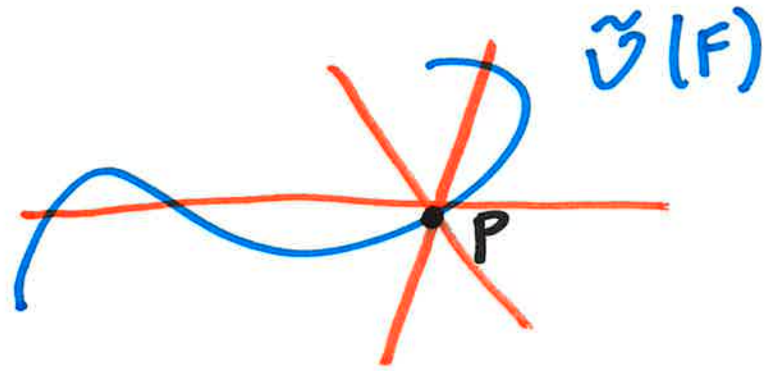
$V(f) \subseteq AG(2,\mathbb{C})$

$\tilde{V}(F) \subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{C}$

<u>Def</u>: Sia $\tilde{V}(F)$ una curva algebrica e sia r una retta. Si dice che r interseca $\tilde{V}(F)$ in un punto P con molteplicità k se sostituendo nell'eq. di $\tilde{V}(F)$ l'eq. parametrica di r il punto P compare come radice del polinomio associato k volte.

<u>Def</u>: Un punto P di $\tilde{V}(F)$ è detto k-uplo se ogni retta per P interseca la curva in P almeno k volte ed esistono

k rette per P che intersecano $\tilde{V}(F)$ in P (k+1)-volte.



Def: Una retta r è detta tangente in un punto semplice (= 1-uplo) di $\tilde{V}(F)$ se essa interseca $\tilde{V}(F)$ in P almeno 2 volte.

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

la retta tangente in $P = (x_1', x_2', x_3') \in \tilde{V}(F)$ ha equazione $\nabla F|_P \cdot (x_1' x_2' x_3') = 0$

$$\begin{cases} F(x_1\ x_2\ x_3)=0 \\ \begin{cases} x_1=\alpha x_1'+\beta x_1'' \\ x_2=\alpha x_2'+\beta x_2'' \\ x_3=\alpha x_3'+\beta x_3'' \end{cases} \end{cases}$$

Thm: sia $p(x)\in \mathbb{K}[x]$ allora ξ radice multipla di $p(x)$ $\Leftrightarrow p(\xi)=p'(\xi)=0$

$$\downarrow$$

$$F(\alpha x_1'+\beta x_1'', \alpha x_2'+\beta x_2'', \alpha x_3'+\beta x_3'')=0$$

$$F(\alpha x_1', \alpha x_2', x_3')=0$$

$\alpha=1, \beta=0$ radice $\quad \xi=\frac{\beta}{\alpha}$

$$\Downarrow$$

$$F(x_1'+\xi x_1'', x_2'+\xi x_2'', x_3'+\xi x_3'')=0$$

ha $\xi=0$ come radice multipla.

$$\frac{d}{d\xi}F(x_1'+\xi x_1'' \dots)=0$$

$$\nabla F|_p=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}\right)$$

$$\nabla F|_p\cdot(x_1''\ x_2''\ x_3'')=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\Big|_P x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\Big|_P x_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3}\Big|_P x_3 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F = \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{i,j} f_{ij}\, x_1^i x_2^j x_3^{n-i-j} =$$

$$= \sum_{i,j} f_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} x_1^i \, x_2^j x_3^{n-i-j} =$$

$$= \sum_{i,j} (f_{ij} \cdot i) x_1^{i-1} x_2^j x_3^{n-i-j}$$

<u>Oss</u>: Un punto di $\tilde{V}(F)$ è multiplo $\iff$ $\nabla F|_P \equiv \underline{0}$

Proposizione: Una curva algebrica $\mathcal{C}(F)$ di ordine n non ha punti $(n+1)$-upli.
Se essa ha un punto n-uplo $\Rightarrow$ essa è unione di n rette per quel punto.

DIM: che non ci siano punti $(n+1)$-upli è immediato dal teorema dell'ordine perché se ci fosse un punto $(n+1)$-uplo $\Rightarrow$ ogni retta per quel punto intersecherebbe $n+1$ volte e quindi sarebbe contenuta $\frac{4}{\ell}$.

per induzione su n.

Sia F un polinomio irriducibile e G un polinomio.
Allora se $\tilde{V}(F) \subseteq \tilde{V}(G)$ si ha $F | G$ come polinomi.
In tal caso si dice che $\tilde{V}(F)$ è componente di $\tilde{V}(G)$.

N.B: Se $G = F \cdot H \Rightarrow \tilde{V}(F) \cup \tilde{V}(H) = \tilde{V}(G)$.

$$G = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2 - x_3)$$

$$F = (x_1 + x_2)^5 (x_1 - x_2 - x_3)^2$$

$$\tilde{V}(F) = \tilde{V}(G)$$

$$G' = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2 - x_3)(x_1 + x_3)$$

$$\tilde{V}(F) \subseteq \tilde{V}(G')$$

In $AG(2,\mathbb{C})$

$f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$

$f(x,y)$ non costante

$$\mathcal{C} = V(f) = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}.$$

$$I(\mathcal{C}) = \{g(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \mid \forall (x_P, y_P) \in \mathcal{C} : g(x_P, y_P) = 0\}.$$

ovviamente $f \in I(V(f))$.

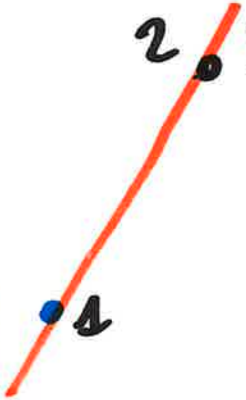
Sia $f_R \in I(V(f))$ il polinomio di grado minimo e monico ivi contenuto

(Thm: $\exists!\, f_R \in I(V(f))$).

Teorema: $V(f) \subseteq V(g)$

$$\Rightarrow f_R \mid g_R$$

$n=2$



P = punto doppio di una curva di ordine 2. $\mathcal{C}$

$\exists\, Q$

$Q \neq P$

$Q \in \mathcal{C}$ $\Rightarrow$ la retta PQ interseca $\mathcal{C}$ almeno $2+1$ volte $= 3 \Rightarrow r \subseteq \mathcal{C}$.

DA QUESTO SEGUE CHE SE $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ eq. di $\mathcal{C}$

$R(x_1, x_2, x_3) = 0$ eq. di r

$\Rightarrow R \mid F$ cioè $F(x_1, x_2, x_3) = R(x_1, x_2, x_3) \cdot H(x_1, x_2, x_3)$.

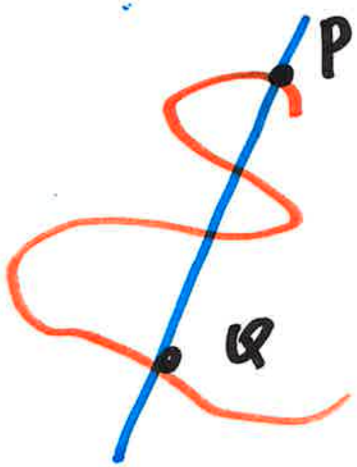
divide

$\Rightarrow \tilde{V}(F) = \tilde{V}(R) \cup \tilde{V}(H)$ e sia $R=0$ che $H=0$ sono rette.

$n-1 \Rightarrow n$

Supponiamo $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ $P \in \tilde{V}(F)$ P punto n-uplo $\Rightarrow \exists\, Q \in \tilde{V}(F)$ $Q \neq P$ e la retta PQ interseca $\tilde{V}(F)$ in $n+1$ punti $\Rightarrow PQ \subseteq \tilde{V}(F)$

$\Rightarrow F = G \cdot R$ con R equazione della retta PQ.



osserviamo che $\tilde{V}(G)$ è una curva di ordine $(n-1)$ e che P sulla retta PQ è un pto semplice $\Rightarrow$ per ipotesi P su $\tilde{V}(G)$ è un punto $(n-1)$-uplo $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva

$\tilde{V}(G)$

si spezza in unione di $n-1$ rette $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\tilde{V}(F)$ si spezza in unione di $(n-1)+1 = n$

rette. $\square$

⚠

ATTENZIONE CHE NON TUTTE LE PROPRIETÀ DI $\mathcal{E}G(n, \mathbb{R})$ SI VEDONO "IN GENERALE" IN $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$.

→ noi non abbiamo mai definito una distanza fra punti ampliati o punti immaginari!

la distanza euclidea è solo fra punti reali!!

Def: In $\mathcal{E}G(n, \mathbb{R})$ visto come sottoinsieme di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$

diciamo che una retta r è isotropa $\iff r \perp r$.

$ax + by + c = 0$

$(-b, a)$ $\Rightarrow$ $(-b, a) \cdot (-b, a) = 0$

$b^2 + a^2 = 0$

abbiamo a meno di coeff. di proporzionalità come soluzioni $(a, b) = (1, \pm i)$. in $\mathbb{C}$

OSS: Due punti in $\mathcal{E}G(n, \mathbb{C})$ sono a distanza euclidea $= 0 \iff$ essi sono su di una retta isotropa.

$$y = \pm i x + b$$ rette isotrope

$P = (x_P, y_P)$ $Q = (x_Q, y_Q)$

$$(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 = 0$$

cioè $(y_P - y_Q) = \pm i (x_P - x_Q)$

da cui Q deve app. ad una retta isotropa per P.

viceversa: se due punti sono su di una retta isotropa.

$P = (x_P, \pm i x_P + b)$ $Q = (x_Q, \pm i x_Q + b)$

$$d(P,Q) = 0.$$

$\square$