Sia $\Sigma = V(f_1, f_2, \dots f_t)$ $\qquad f_i \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$

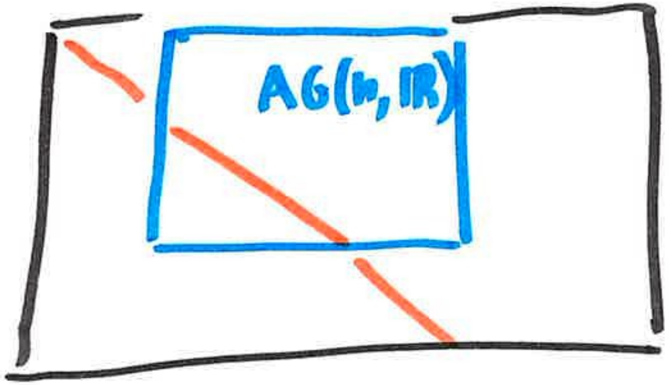
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f_i \in \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$

$V(f_1 \dots f_n) = \{ P = (p_1 \dots p_n) \in AG(n, \mathbb{C}) \mid f_1(P) = f_2(P) = \dots = 0 \}$

$V(x - y + 1)$ retta nel piano. in $AG(2, \mathbb{C})$

$V(x + y + 3, z - x + 1)$ retta in $AG(3, \mathbb{C})$.

$(i, -1+i) \in V(x - y + 1)$



$AG(n, \mathbb{C})$

Def: $\Sigma = V(f_1 \dots f_t)$ reale $\iff \Sigma = \overline{\Sigma}$

cioé $\iff \forall P : P \in \Sigma :\iff \overline{P} \in \Sigma$.

Teorema Σ è reale $\iff$ esso può essere descritto come insieme di soluzioni di un sistema di eq. a coeff. tutti in $\mathbb{R}$.

DIM: Supponiamo $\Sigma = V(f_1 \dots f_t)$ con $f_i \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ $\forall i$

osserviamo che $\forall i \ \forall (a_1 \dots a_n)$:

$$f_i(a_1 \dots a_n) = \overline{f}_i(a_1 \dots a_n)$$

$$\Rightarrow \text{se } f_i(a_1 \dots a_n) = 0 \iff \overline{f_i(a_1 \dots a_n)} = 0 \iff$$

$$\iff \overline{f}_i(\overline{a}_1 \dots \overline{a}_n) = 0 \iff f_i(\overline{a}_1 \dots \overline{a}_n) = 0$$

quindi se $P \in \Sigma \Rightarrow \overline{P} \in \Sigma \Rightarrow \Sigma = \overline{\Sigma}$.

Supponiamo sia $\Sigma = \overline{\Sigma}$

$$\Sigma = V(f_1 \dots f_t) \quad \text{con} \quad f_i \in \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$$

ma

$$\overline{\Sigma} = V(\overline{f}_1 \dots \overline{f}_t)$$

Infatti se $(a_1 \dots a_n)$ è tale che $f_i(a_1 \dots a_n) = 0 \iff$

$$\iff \overline{f_i(a_1 \dots a_n)} = 0 \iff \overline{f}_i(\overline{a}_1 \dots \overline{a}_n) = 0$$

$\iff (\overline{a}_1 \dots \overline{a}_n)$ è radice di $\overline{f}_i(x_1 \dots x_n)$

$\Rightarrow$ se $\Sigma = \overline{\Sigma} \Rightarrow \Sigma = \Sigma \cap \overline{\Sigma}$

$$\Sigma \cap \overline{\Sigma} = V(f_1, \overline{f}_1, f_2, \overline{f}_2 \dots f_t, \overline{f}_t)$$

Se $f_j = -\bar{f}_j \Rightarrow$ questo significa che tutti i coeff. del polinomio f_j sono immaginari puri, cioè $f_j = i \cdot g_j(x_1 \dots x_n)$ con $g_j(x_1 \dots x_n)$ reale.

$\Rightarrow$ il sistema $\begin{cases} f_j(x_1 \dots x_n) = 0 \\ \bar{f}_j(x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases}$ è equivalente

all'eq. $g_j(x_1 \dots x_n) = 0$

ed in particolare $V(f_1, \bar{f}_1, \dots f_j, \bar{f}_j, \dots f_t, \bar{f}_t) =$

$= V(f_1, \bar{f}_1, \dots g_j, \dots f_t, \bar{f}_t).$

Se $f_j \neq \bar{f}_j \Rightarrow$ il sistema

$$(1) \begin{cases} f_j(x_1 \dots x_n) = 0 \\ \bar{f}_j(x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

é equivalente al

sistema

$$(1)' \begin{cases} (f_j + \bar{f}_j)(x_1 \dots x_n) = 0 \\ i(f_j - \bar{f}_j)(x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

ma $(f_j + f_j)(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$

$(f_j - \bar{f}_j)(x_1 \dots x_n) = i\, g_j(x_1 \dots x_n) \Rightarrow$ con $g \in \mathbb{R}[\ldots]$

$\Rightarrow i(f_j - \bar{f}_j)(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$

$\square$

1) Ogni curva $(n=2)$ o in generale varietà algebrica di $AG(n, \mathbb{R})$ si può vedere come una varietà algebrica reale di $AG(n, \mathbb{C})$.

2) ABBIAMO UNA DESCRIZIONE IN TERMINI "GEOMETRICI" DELL'ESSERE REALE PER UNA VARIETÁ / CURVA DI $AG(n, \mathbb{C})$.

→ geometria dei sottospazi lineari : nel passare da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ non cambia praticamente nulla.

$$r_6 : \begin{cases} x + 2iy + 3z = 5 + i \\ x - 2iy + 3z = 5 - i \end{cases} \leadsto \begin{cases} x + 3z = 5 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

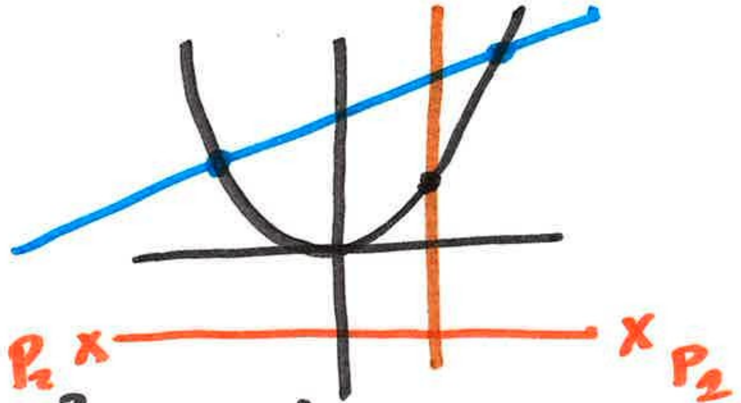
$$\begin{cases} 2x + 6z = 10 \\ i(4y) = i(2i) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3z = 5 \\ 2y = 1 \end{cases}$$ eq. reali.

<u>OSS</u>: $\mathcal{C}: y = x^2$ in $AG(2, \mathbb{R})$

~~ax+~~ $r: y = ax + b$

in $AG(2, \mathbb{C})$

$ax + b = x^2$



$P_1 = \overline{P_2}$

$x^2 - ax - b = 0$

$\cancel{\Delta = a^2}$

$\Delta = a^2 + 4b$

$X = \alpha \Rightarrow y = \alpha^2$

se $\Delta > 0 \Rightarrow |\mathcal{C} \cap r| = 2$

$\Delta = 0 \Rightarrow |\mathcal{C} \cap r| = 1$ pto $\times 2$

$\Delta < 0 \Rightarrow |\mathcal{C} \cap r| = 2$ punti immag.e coniugati

AMPLIAMENTO PROIETTIVO

Sottospazio lineare di $AG(n, \mathbb{K})$.

$$\Pi = \{ P : AP = B \}$$ con $AX = B$ sistema lineare compatibile opportuno.

$$\Pi = [P_0 ; W]$$

ove P_0 sol. particolare di $AX = B$

$W = \ker(A) =$ soluzione di $AX = \underline{0}$

$$(A|B)\begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} (A|B)\hat{X} = \underline{0} \\ x_{n+1} = -1 \end{cases}$$

se risolvo $(A|B)\hat{X} = \underline{0}$ ottengo uno sp. vettoriale

$\hat{W}$

ottengo anche $\hat{W} \cap \{X \mid x_{n+1} = 0\}$ = sol. omogeneo associato.

$\forall\, y \in \hat{W} \setminus \{X \mid x_{n+1} = 0\} \rightarrow y/_{-y_{n+1}}$ è una soluzione del sistema $AX = B$

$$(A|B)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ -y_{n+1} \end{bmatrix} = \underline{0} \qquad z_i = \frac{y_i}{y_{n+1}}$$

$$A\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - B\, y_{n+1} = \underline{0} \qquad y_{n+1} \neq 0$$

$$A\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} - B \cdot 1 = \underline{0}$$

$$A\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = B$$

In $\hat{W}$ si trovano sia le soluzioni di $AX = \underline{0}$ che quelle di $AX = B$

→ le soluzioni di $AX = \underline{0}$ corrispondono ai vettori y con $y_{n+1} = 0$

→ le soluzioni di $AX = B$ corrispondono ai ~~vettori~~ sottospazi vettoriali di dim $= 1$ con $y_{n+1} \neq 0$

↓

infatti per un vettore $(y_1 \dots y_n, y_{n+1})$ con $y_{n+1} \neq 0$ troviamo una soluzione $(z_1 \dots z_n)$ ponendo

$z_i = \frac{y_i}{y_{n+1}}$ e vettori prop. danno la stessa soluzione.

$\underline{\underline{n=2}}$ <u>piano</u>

$$ax+by+c=0 \quad \text{eq. retta.}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} ax_1+b\cancel{y}x_2+cx_3=0 & \text{eq. om.} \\ x_3=1 & \text{pti propri} \end{cases}$$

$\downarrow$

ottengo delle terne del tipo

$$(x_P, y_P, 1) \longleftrightarrow (x_P, y_P)$$

Studiamo ora indipendentemente l'eq.

$$ax_1+bx_2+cx_3=0$$

le soluzioni sono uno sp. vettoriale di dim $=2$

$$\hat{W}$$

A) $(\ell, m, 0) \in \hat{W} \iff (\ell, m)$ sono parametri direttori della retta.

$\rightarrow$ in particolare $\exists$ una corrispondenza fra tutti i possibili parametri direttori $\alpha(\ell, m)$ $\alpha \neq 0$ e il sott. 1-dim. $\mathcal{L}((\ell, m, 0))$.

B) $x_3 \neq 0 \Rightarrow \forall$ terna $(y_1\, y_2\, y_3)$ con $y_3 \neq 0$ $\exists$ un punto della retta di coord. $(y_1/y_3, y_2/y_3)$ e quindi $\exists$ una corrispondenza fra i punti Propri (affini) della retta e i sott. 1-dim di $\hat{W}$

del tipo $\mathcal{L}((y_1, y_2, y_3))$ $y_3 \neq 0$.

$\mathcal{L}((y_1\ y_2\ y_3))$ — $y_3 = 0 \to \mathcal{L}((y_1, y_2))$ param. direttori

$y_3 \neq 0 \to \left(\frac{y_1}{y_3}\ \frac{y_2}{y_3}\right)$ punto affine.

r retta affine $\to$ sott. di $\hat{W}$ con dim $= 1$ $x_3 \neq 0$

$r \cup t_\infty$ retta affine + punto improprio $\to$ sott. di $\hat{W}$ con $x_3 = 0$
che rappresenta la sua direzione.

$AG(2,\mathbb{R})$

$r: \; y = 2X + 3$

$2X - y + 3 = 0$

$P = (X, 2X+3)$

$\mathcal{L}((\ell, m)) = \mathcal{L}((\underline{\underline{1,2}}))$

$r := [\,(\underline{\underline{0,3}});\mathcal{L}((1,2))\,]$

$$\downarrow$$

$$2X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$$

$S = \mathcal{L}((\underline{\underline{1,2}},0),(\underline{\underline{0,3}},1))$

$X_3 = 0 \Rightarrow S \cap \ell_\infty = \mathcal{L}((1,2,0)) \longleftrightarrow \mathcal{L}((1,2))$

$X_3 \neq 0 \rightarrow (\alpha, 2\alpha + 3\beta, \beta)$ $\quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$

$$\downarrow$$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}, 2\frac{\alpha}{\beta} + 3, 1\right) \rightarrow (\gamma, 2\gamma + 3)$

Def: Si dice geometria proiettiva di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ la geometria $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ in cui i punti sono rappresentati dai sottospazi vettoriali 1-dimensionali di uno spazio vettoriale $V_{n+1}(\mathbb{K})$; le rette corrispondono agli spazi vettoriali 2-dim. di $V_{n+1}(\mathbb{K})$.

OSS: per 2 punti distinti passa una ed una sola retta.

U, W punti distinti $\Rightarrow \dim U = 1$, $\dim W = 1$

$\dim(U \oplus W) = 2$ è una retta.

Sia $AG(n, \mathbb{K})$ uno spazio affine.
Il completamento proiettivo $PG(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ di $AG(n, \mathbb{K})$ è la geometria proiettiva in cui si immergono gli elementi di $AG(n, \mathbb{K})$ come segue.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & & \text{in } \mathbb{P}^n\mathbb{K} \\ (p_1 \dots p_n) & \longmapsto & \mathcal{L}((p_1 \dots p_n, 1)) \end{array}$$

$\boxed{n=2}$
Data una curva algebrica $\mathcal{C}$ di equazione
$$f(x, y) = 0 \text{ in } AG(2, \mathbb{K})$$ consideriamo l'equazione omogenea associata
$$x_3^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = F(x_1, x_2, x_3).$$

OSSERVIAMO CHE $F(x_1 x_2 x_3)$ é un polinomio del medesimo grado di $f(x,y)$ ed omogeneo (cioé tutti i monomi hanno lo stesso grado).

CHIAMIAMO PUNTI PROIETTIVI DI $\mathcal{C}$ TUTTI I SOTTOSPAZI 1-dimensionali CONTENUTI NELL'INSIEME

$$\tilde{V}(F) := \{(x_1 x_2 x_3) : F(x_1 x_2 x_3) = 0\}.$$

OSS: $(x,y) \in V(f) \iff \mathcal{L}((x,y,1)) \in \tilde{V}(F)$

I punti di $\tilde{V}(F)$ o in generale di $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ che vengono da punti di $AG(n,\mathbb{K})$ sono detti punti propri; i punti di $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ che non vengono da punti di $AG(n, \mathbb{K})$ (= sott. di dim = 1 che hanno ultima componente = 0) sono detti punti impropri o punti all'∞.

$\rightarrow \; x+y+3=0 \longmapsto \cancel{x_1+y}$

$$x_3\left(\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_2}{x_3}+3\right)=0$$

$$\downarrow$$

$$x_1+x_2+3x_3=0$$

$(-1,-2) \in r \longrightarrow \mathcal{L}((-1,-2,1)) \rightarrow$ punto proprio

$(-3,0) \xleftarrow[\text{per } x_3]{\text{divido}} \mathcal{L}((6,0,-2))$

$$x_3 = 0 \rightarrow \mathcal{L}((1,-1,0))$$

$\downarrow$

|DIREZIONE DELLA RETTA|

$$x^2 + 2y + xy + 2 = 0$$

$$\longrightarrow x_3^2\left[\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + 2\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + \left(\frac{x_1}{x_3}\right)\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + 2\right] = 0$$

$\downarrow$

$$x_1^2 + 2x_2x_3 + x_1x_2 + 2x_3^2 = 0$$

$$(0,-1) \longrightarrow \mathcal{L}((0,-1,1))$$

$$x_3 = 0 \quad x_1^2 + x_1x_2 = 0$$

$$x_1(x_1 + x_2) = 0$$

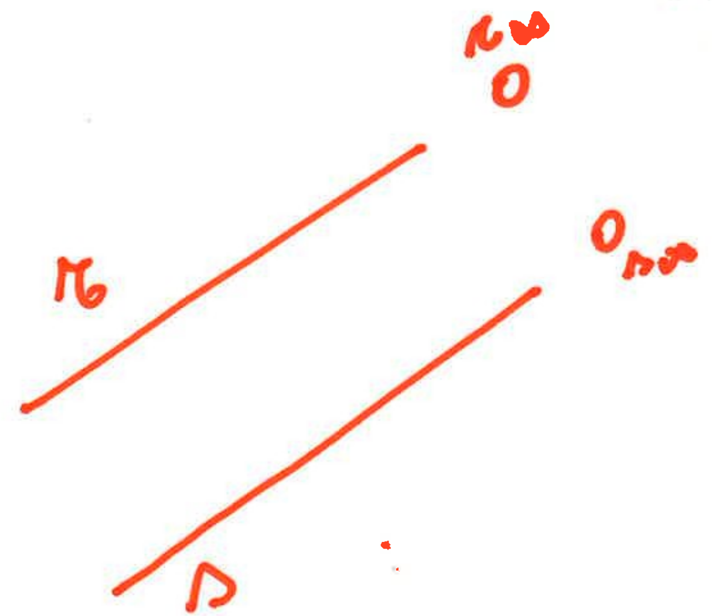
$$P_1 = \mathcal{L}((0,1,0))$$

$$P_2 = \mathcal{L}((1,-1,0))$$

$f(x,y)$

$$f(x_1 \dots x_n) \xmapsto{\text{omogeneizzazione}} X_{n+1}^{\deg f} f\left(\frac{X_1}{X_{n+1}} \dots \frac{X_n}{X_{n+1}}\right)$$

$$f(x_1 \dots x_n) = F\left(\frac{X_1}{X_{n+1}} \dots \frac{X_n}{X_{n+1}}, 1\right) \longleftarrow F(X_1 \dots X_n, X_{n+1})$$



in $AG(2,\mathbb{K})$, r, s rette abbiamo aggiunto ad r ed ad s un pto che corrisponde alla loro direzione.

Teorema: in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ due rette distinte si intersecano sempre.

<u>DIM</u>: Ad $AG(2,\mathbb{K})$ corrisponde uno s. vett. di dim $= 3$

Ad r, s corrispondono 2 sp. vett. di dim $= 2$

$\Rightarrow$ per GRASSMANN 2 sott. di dim 2 in uno sp. di dim $= 3$ si int. sempre in uno sp.

di dim $= 1$

$\Rightarrow$ ... $\exists\, P \in r \cap s$. $\square$

P può essere un punto proprio $\Rightarrow r \cap s \neq \emptyset$ anche in $AG(2, \mathbb{K})$.

P può essere punto improprio $\Rightarrow r \parallel s$ in $AG(2, \mathbb{K})$

$r \neq s$

$$r: ax + by + c = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \\ a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 = 0 \end{cases} \overset{(*)}{\longrightarrow} \infty^1 \text{ solut.}$$

$$s: a'x + b'y + c' = 0$$

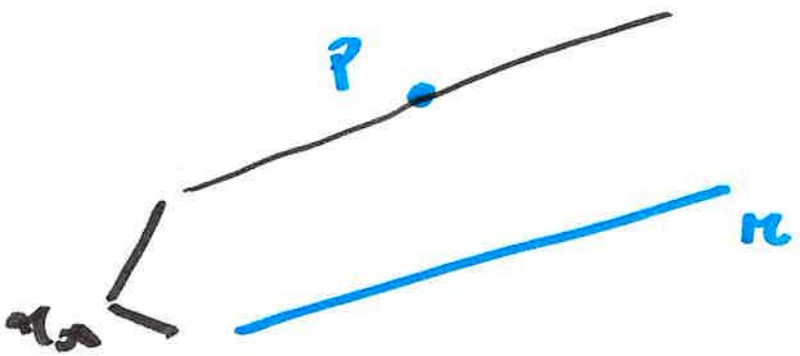
se $r \neq s \Rightarrow rk \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 2$

(*) rappresentano 1 punto in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$.

P proprio $\Rightarrow \mathcal{L}((p, q, r))$ $r \neq 0$ $(p/r, q/r) \ni r \cap s$

P improprio $\Rightarrow x_3=0 \Rightarrow rk\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \neq rk\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$

$\Rightarrow rk\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} = 1 \rightarrow r // s$



BIIEZIONE FRA RETTE DI UN FASCIO E PUNTI DI UNA RETTA PROIETTIVA

OSS: Sia r una retta proiettiva di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$

$r: \; ax_1+bx_2+cx_3=0$

In particolare abbiamo che per 2 punti distinti passa una ed una sola retta.

Eq. retta per 2 pti (proiettiva)

$P = \mathcal{L}((x_1', x_2', x_3'))$ $\quad Q = \mathcal{L}((x_1'', x_2'', x_3''))$ $\quad P \neq Q$

$(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{L}((x_1', x_2', x_3')\,(x_1'', x_2'', x_3''))$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0 \quad \longmapsto \text{eq affine} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0$$

CASO 1 sia P che Q sono punti propri

$P = \mathcal{L}((x_P, y_P, 1))$ $\quad Q = \mathcal{L}((x_Q, y_Q, 1))$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \end{vmatrix} = 0$$

CASO 2: P punto proprio $P = \mathcal{L}((x_P\ y_P\ 1))$

Q punto improprio $Q = \mathcal{L}((\ell, m, 0))$.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ \ell & m & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \ell & m & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{x - x_P}{\ell} = \frac{y - y_P}{m}$$

CASO 3: P, Q impropri $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \ell & m & 0 \\ \jmath & t & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x_3 = 0$

$x_3 = 0 \to$ retta all'infinito di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ o
retta impropria.

In $\widetilde{AG}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ ogni <u>retta</u> ha sempre almeno un punto reale.

<u>DIM</u>: 2 rette in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ si intersecano sempre.

r_0 retta e consideriamo

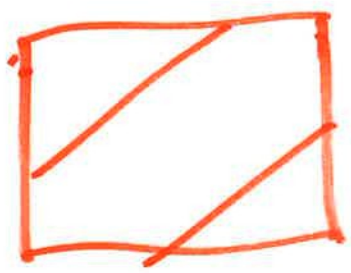
$r_0 \cap \bar{r} \ni P$ se $r = \bar{r} \Rightarrow r$ retta reale $\Rightarrow$ FINE

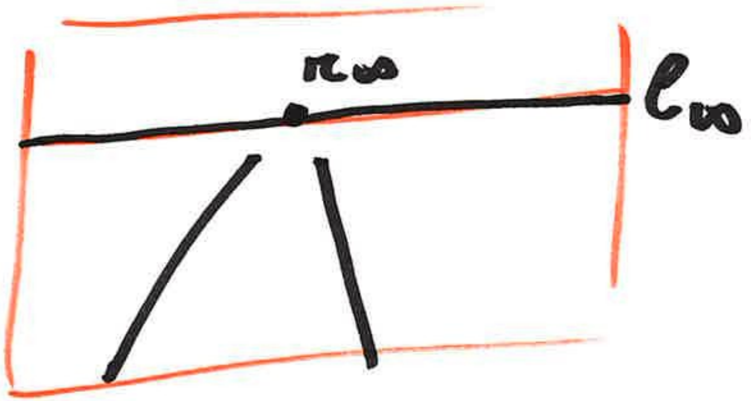
ALTRIMENTI $P = r \cap \bar{r} \Rightarrow P = \bar{P}$ perché $r \cap \bar{r} = \bar{r} \cap r$.

$\Rightarrow P$ punto reale $\square$

- P punto proprio $\Rightarrow$ le 2 rette hanno in comune un punto di $AG(2,\mathbb{R})$

- P punto improprio $\Rightarrow$ le 2 rette hanno in comune la loro direzione e quindi sono parallele con p. direttori reali





$X_3 = 0$

COORDINATE OMOGENEE.

$n=2,\ n=3$

$$AG(n, \mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{K}$$

$(x_1 \dots x_n)$ $\qquad \mathcal{L}((x_1 \dots x_n\, x_{n+1}))$ $\quad x_{n+1}=1$

Si dicono coordinate omogenee di un punto $P = (x_1 \dots x_n) \in AG(n, \mathbb{K})$ la classe di equivalenza di tutte le possibili basi di $\mathcal{L}((x_1 \dots x_n\, 1))$.

$$(x_1 \dots x_n) \longrightarrow [(x_1 \dots x_n\, 1)] \in \frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}}{\sim}$$

in particolare $[(a_1 \dots a_n\, a_{n+1})] = [(b_1 \dots b_n\, b_{n+1})]$

$\iff \exists\, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : (a_1 \dots a_{n+1}) = \alpha (b_1 \dots b_{n+1})$

N.B. Sia $F(x_1 \dots x_n\, x_{n+1})$ un polinomio omogeneo di grado $d \Rightarrow$ se $(a_1 \dots a_n\, a_{n+1})$ è soluzione di $F=0$
$\Rightarrow$ anche $\lambda(a_1 \dots a_n\, a_{n+1})$ è soluzione.

$$F(\lambda a_1 \dots \lambda a_{n+1}) = \lambda^{\deg F} F(a_1 \dots a_{n+1})$$

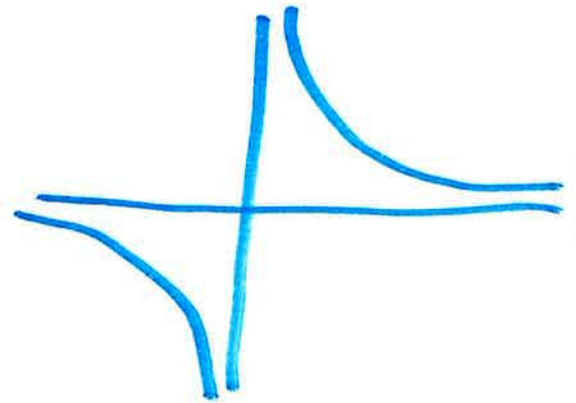
In particolare eq. omogenee descrivono punti proiettivi.

Def: L'iperpiano di $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ di equazioni $x_{n+1}=0$ è detto iperpiano improprio o iperpiano all'infinito. $\rightarrow$ è il luogo di tutti i punti che non vengono da punti di $AG(n, \mathbb{K})$.

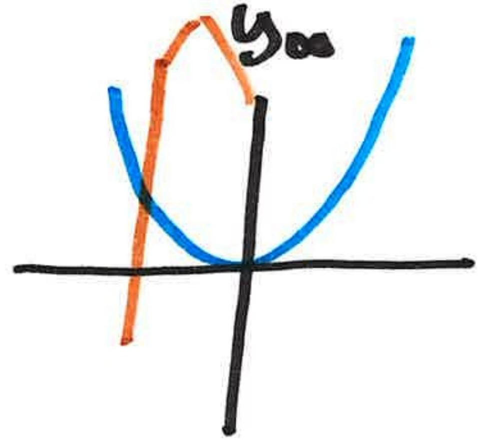
[I punti dell'iperpiano improprio ($\forall n$) corrispondono alle direzioni delle rette in $AG(n, \mathbb{K})$.]

$y_\infty = [(0\,1\,0)]$

$xy = 1$



$X_\infty = [(1\,0\,0)]$



$y = x^2$

$x_2 x_3 = x_1^2$

$x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$[(0,1,0)]$

$x = \alpha \Rightarrow x_1 = \alpha x_3 \rightarrow x_3 = 0$
$x_1 = 0$

$[(0,1,0)]$