Università degli Studi di Brescia
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

α

Algebra Lineare e Geometria

Quinto Appello - 07/07/2025

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) In $\mathbb{R}^6$ si determinino, se esistono, tre sottospazi non banali A, B, C tali che essi siano a 2 a 2 in somma diretta, $\dim(A) = \dim(B) = \dim(C) = 2$ e $\dim(A + B + C) = 5$.

B) Si calcoli la distanza del punto $(0,0)$ dalla retta $r : x + 2y + 1 = 0$ rispetto il prodotto scalare $(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = 4x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

C) Si determini al variare del parametro reale k la posizione reciproca delle seguenti due rette in $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ e se ne trovino gli eventuali punti di intersezione

$$r : \begin{cases} kx_1 + x_2 - x_3 + (k+1)x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - kx_4 = 0 \end{cases} , \qquad s : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2kx_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + kx_4 = 0 \end{cases} .$$

D) Si determini, al variare del parametro reale k, la dimensione del sottospazio affine S di $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ passante per i punti $A = (1,0,0)$, $B = (k, k+2, k)$, $C = (0, 2, k)$. Posto $k = -2$ si deterimini una rappresentazione cartesiana dello stesso.

E) Per quali valori del parametro reale k (se esistono) il punto $(1,1)$ è la proiezione ortogonale del punto $(2,0)$ sulla retta $k(x + y - 2) + 2x + 3y - 5 = 0$.

F) Rispetto le basi canoniche, si scrivano la matrice di una applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ iniettiva e di una applicazione lineare $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ suriettiva. Si determini poi la dimensione del ker della applicazione composta $\psi \circ \phi$.

G) Si determini una base dello spazio vettoriale $\mathbb{C}[x]_{\leq 3}$ di tutti i polinomi a coefficienti complessi di grado al più 3 tale che il sottospazio $\mathscr{V} = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \colon f(i) = 0, f(1) = 0\}$ abbia equazioni $x_1 = 0 = x_2$ rispetto ad essa.

β

Università degli Studi di Brescia
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Algebra Lineare e Geometria

Quinto Appello - 07/07/2025

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) In $\mathbb{R}^{3,3}$ si determinino, se esistono, tre sottospazi non banali A, B, C tali che essi siano a 2 a 2 in somma diretta e $\dim(A) = \dim(B) = 2$, $\dim(C) = 3$ e $\dim(A + B + C) = 5$.

B) Si calcoli la distanza del punto $(0, 0)$ dalla retta $r : x + 2y + 1 = 0$ rispetto il prodotto scalare $(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2$.

C) Si determini al variare del parametro reale k la posizione reciproca delle seguenti due rette in $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ e se ne trovino gli eventuali punti di intersezione

$$r : \begin{cases} (k+1)x_1 + x_2 - x_3 + kx_4 = 0 \\ kx_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} , \qquad s : \begin{cases} 2kx_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ kx_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} .$$

D) Si determini, al variare del parametro reale k, la dimensione del sottospazio affine S di $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ passante per i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (k, k + 2, k)$, $C = (0, 2, k)$. Posto $k = -2$ si deterimini una rappresentazione cartesiana dello stesso.

E) Per quali valori del parametro reale k (se esistono) il punto $(0, 1)$ è la proiezione ortogonale del punto $(1, 1)$ sulla retta $k(x + y - 1) + x + 2y - 2 = 0$.

F) Rispetto le basi canoniche, si scrivano la matrice di una applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ suriettiva e di una applicazione lineare $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ iniettiva. Si determini poi la dimensione del ker della applicazione composta $\psi \circ \phi$.

G) Si determini una base dello spazio vettoriale $\mathbb{C}[x]_{\leq 3}$ di tutti i polinomi a coefficienti complessi di grado al più 3 tale che il sottospazio $\mathscr{V} = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \colon f(0) = 0, f(-i) = 0\}$ abbia equazioni $x_1 = 0 = x_3$ rispetto ad essa.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

γ

Algebra Lineare e Geometria

Quinto Appello - 07/07/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) In $\mathbb{R}^6$ si determinino, se esistono, tre sottospazi non banali A, B, C tali che essi siano a 2 a 2 in somma diretta, $\dim(A) = \dim(B) = \dim(C) = 2$ e $\dim(A + B + C) = 5$.

B) Si calcoli la distanza del punto $(0, 0)$ dalla retta $r : x + 2y + 1 = 0$ rispetto il prodotto scalare $(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2$.

C) Si determini al variare del parametro reale k la posizione reciproca delle seguenti due rette in $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ e se ne trovino gli eventuali punti di intersezione

$$r : \begin{cases} x_1 + (k+1)x_2 - x_3 + kx_4 = 0 \\ kx_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} , \qquad s : \begin{cases} x_1 + 2kx_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + kx_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} .$$

D) Si determini, al variare del parametro reale k, la dimensione del sottospazio affine S di $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ passante per i punti $A = (k+2, k, 0)$, $B = (k, k+2, k)$, $C = (0, 2, k)$. Posto $k = 1$ si deterimini una rappresentazione cartesiana dello stesso.

E) Per quali valori del parametro reale k (se esistono) il punto $(1, -1)$ è la proiezione ortogonale del punto $(1, 1)$ sulla retta $k(x + 2y + 1) + 2x + 3y + 1 = 0$.

F) Rispetto le basi canoniche, si scrivano la matrice di una applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ suriettiva e di una applicazione lineare $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettiva. Si determini poi la dimensione del ker della applicazione composta $\psi \circ \phi$.

G) Si determini una base dello spazio vettoriale $\mathbb{C}[x]_{\leq 3}$ di tutti i polinomi a coefficienti complessi di grado al più 3 tale che il sottospazio $\mathscr{V} = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \colon f(2i) = 0, f(0) = 0\}$ abbia equazioni $x_2 = 0 = x_4$ rispetto ad essa.

Università degli Studi di Brescia
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

δ

Algebra Lineare e Geometria

Quinto Appello - 07/07/2025

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) In $\mathbb{R}^{3,3}$ si determinino, se esistono, tre sottospazi non banali A, B, C tali che essi siano a 2 a 2 in somma diretta e $\dim(A) = \dim(B) = 2$, $\dim(C) = 3$ e $\dim(A + B + C) = 5$.

B) Si calcoli la distanza del punto $(0, 0)$ dalla retta $r : x + 2y + 1 = 0$ rispetto il prodotto scalare $(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = 4x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

C) Si determini al variare del parametro reale k la posizione reciproca delle seguenti due rette in $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ e se ne trovino gli eventuali punti di intersezione

$$r : \begin{cases} x_1 - x_2 + (k+1)x_3 + kx_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = 0 \end{cases} \quad , \qquad s : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2kx_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + kx_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad .$$

D) Si determini, al variare del parametro reale k, la dimensione del sottospazio affine S di $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ passante per i punti $A = (k+2, k, 0)$, $B = (k, k+2, k)$, $C = (0, 2, k)$. Posto $k = 1$ si deterimini una rappresentazione cartesiana dello stesso.

E) Per quali valori del parametro reale k (se esistono) il punto $(-1, 1)$ è la proiezione ortogonale del punto $(2, 0)$ sulla retta $k(2x + y + 1) + x + 3y - 2 = 0$.

F) Rispetto le basi canoniche, si scrivano la matrice di una applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ suriettiva e di una applicazione lineare $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ iniettiva. Si determini poi la dimensione del ker della applicazione composta $\psi \circ \phi$.

G) Si determini una base dello spazio vettoriale $\mathbb{C}[x]_{\leq 3}$ di tutti i polinomi a coefficienti complessi di grado al più 3 tale che il sottospazio $\mathscr{V} = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \colon f(1) = 0, f(0) = 0\}$ abbia equazioni $x_2 = 0 = x_3$ rispetto ad essa.