



Algebra Lineare e Geometria

Primo Appello - 10/01/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) Si determinino (se esistono) in $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ due rette sghembe ed ortogonali contenute rispettivamente nei piani $x + 2y + 3z = 2$ e $2x + 4y + 6z = -6$.

B) Si determini, al variare di $k \in \mathbb{C}$, una base del complemento ortogonale rispetto il prodotto scalare standard in \mathbb{C}^4 di $\mathcal{U}_k := \mathcal{L}(\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = k^2 + 1, x_1 + 3x_4 = 0\})$.

C) Si determini per quali valori di k esistono matrici $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ non diagonalizzabili con autovettori $(1, 1, 1)$, $(0, k, 1)$, $(1, 0, 0)$.

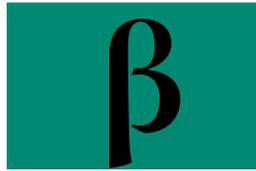
D) Si determini una base dello spazio vettoriale $\mathbb{C}_{\leq 3}[x]$ dei polinomi di grado al più 3 a coefficienti in \mathbb{C} tale che il polinomio $x^3 - 1$ abbia componenti $(1, 2, 3, 4)$ rispetto ad essa.

E) Si determini, al variare del parametro reale k il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + ky + 2t = 1 \\ y + kz + t = 2 \\ x + (k + 1)y + kz + (k + 3)t = 3. \end{cases}$$

F) Si studi, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la natura della conica \mathcal{C}_k di equazione omogenea $F_k(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2kx_1x_2 - x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$.

G) Si fissi una base \mathfrak{B} in \mathbb{R}^3 e si scriva la matrice rispetto a \mathfrak{B} della proiezione ortogonale di \mathbb{R}^3 sul sottospazio avente equazione $\Pi : x + y - z = 0$ rispetto la base canonica.



Algebra Lineare e Geometria

Primo Appello - 10/01/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) Si determinino (se esistono) in $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ due rette sghembe ed ortogonali contenute rispettivamente nei piani $x + y + z = 2$ e $x + y + z = -5$.

B) Si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base del complemento ortogonale rispetto il prodotto scalare standard in \mathbb{R}^4 di $\mathcal{U}_k := \mathcal{L}(\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 3x_2 + x_3 = k^2 - 1, x_1 + x_4 = 0\})$.

C) Si determini per quali valori di k esistono matrici $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ non diagonalizzabili con autovettori $(1, 0, 1)$, $(0, 1, k)$, $(2, 2, 2)$.

D) Si determini una base dello spazio vettoriale $\mathbb{C}_{\leq 3}[x]$ dei polinomi di grado al più 3 a coefficienti in \mathbb{C} tale che il polinomio $x^3 + 2x - 3i$ abbia componenti $(1, 0, -1, 0)$ rispetto ad essa.

E) Si determini, al variare del parametro reale k il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + ky + 2t = 1 - k \\ y + kz + t = 0 \\ x + (k + 1)y + kz + (k + 3)t = 0. \end{cases}$$

F) Si studi, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la natura della conica \mathcal{C}_k di equazione omogenea $F_k(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2kx_1x_2 - x_2^2 + 2x_2x_3 + (k - 1)x_3^2$.

G) Si fissi una base \mathfrak{B} in \mathbb{R}^3 e si scriva la matrice rispetto a \mathfrak{B} della proiezione ortogonale di \mathbb{R}^3 sul sottospazio avente equazione $\Pi : x - y - z = 0$ rispetto la base canonica.



Algebra Lineare e Geometria

Primo Appello - 10/01/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) Si determinino (se esistono) in $\mathcal{L}_3(\mathbb{R})$ due rette sghembe a distanza 2 contenute nei piani $x + 3y + z = 2$ e $3x - y - 2z = 4$.

B) Si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base del complemento ortogonale rispetto il prodotto scalare standard in \mathbb{R}^4 di $\mathcal{U}_k := \mathcal{L}(\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = k^2 + 1, x_1 - 2x_4 = 0\})$.

C) Si determini per quali valori di k esistono matrici $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ non diagonalizzabili con autovettori $(1, 0, 1)$, $(0, k, 1)$, $(1, 0, 0)$.

D) Si determini una base dello spazio vettoriale $\mathbb{C}_{\leq 3}[x]$ dei polinomi di grado al più 3 a coefficienti in \mathbb{C} tale che il polinomio $x^3 + x^2 + x + 1$ abbia componenti $(i, 0, 0, -1)$ rispetto ad essa.

E) Si determini, al variare del parametro reale k il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + ky + 2t = 0 \\ y + kz + t = 0 \\ x + (k + 1)y + kz + (k + 3)t = 2 - k. \end{cases}$$

F) Si studi, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la natura della conica \mathcal{C}_k di equazione omogenea $F_k(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2kx_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$.

G) Si fissi una base \mathcal{B} in \mathbb{R}^3 e si scriva la matrice rispetto a \mathcal{B} della proiezione ortogonale di \mathbb{R}^3 sul sottospazio avente equazione $\Pi : x + y + z = 0$ rispetto la base canonica.



Algebra Lineare e Geometria

Primo Appello - 10/01/2025

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) Si determinino (se esistono) in $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ due rette sghembe a distanza 3 contenute nei piani $x + y + z = 2$ e $x - y - z = 4$.

B) Si determini, al variare di $k \in \mathbb{C}$, una base del complemento ortogonale rispetto il prodotto scalare standard in \mathbb{C}^4 di $\mathcal{U}_k := \mathcal{L}(\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 3x_2 + x_3 = k^2 - 1, x_1 + 2x_4 = 0\})$.

C) Si determini per quali valori di k esistono matrici $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ non diagonalizzabili con autovettori $(2, 0, 1)$, $(0, k, 1)$, $(2, 2, 2)$.

D) Si determini una base dello spazio vettoriale $\mathbb{C}_{\leq 3}[x]$ dei polinomi di grado al più 3 a coefficienti in \mathbb{C} tale che il polinomio $x^2 + 2ix - 1$ abbia componenti $(1, i, 1, 1)$ rispetto ad essa.

E) Si determini, al variare del parametro reale k il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + ky + 2t = 0 \\ y + kz + t = 0 \\ x + (k + 1)y + kz + (k + 3)t = 4 - k. \end{cases}$$

F) Si studi, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la natura della conica \mathcal{C}_k di equazione omogenea $F_k(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2kx_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$.

G) Si fissi una base \mathcal{B} in \mathbb{R}^3 e si scriva la matrice rispetto a \mathcal{B} della proiezione ortogonale di \mathbb{R}^3 sul sottospazio avente equazione $\Pi : x - y + z = 0$ rispetto la base canonica.
